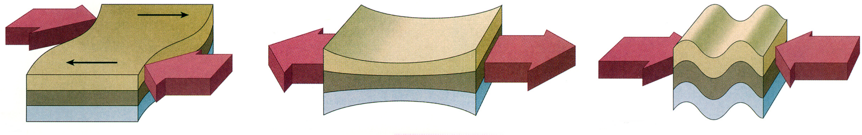
Un esempio di base: elasticità lineare

Incognita: configurazione di equilibrio $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mathbf{C}Du) = 0 \text{ in } \Omega \\ (\mathbf{C}Du)\hat{n} = f \text{ su } \partial\Omega \end{cases} \qquad \boldsymbol{\sigma}(u) = \mathbf{C}Du$$

equivalentemente

$$u \in \operatorname{argmin} \left\{ \tfrac{1}{2} \int_\Omega Du : \mathbf{C}Du \, dx - \int_{\partial\Omega} f \cdot u \, ds \right\}$$



Una variante elasto-dinamica

$$u : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^3 \qquad \begin{cases} \ddot{u} = \operatorname{div}(\mathbf{C}Du) \text{ in } \Omega \\ u = g \text{ su } \partial\Omega \end{cases} \qquad \text{con} \quad u(0) = u_0$$

Quali domande e quali risposte

- Dove cerco la soluzione? In uno spazio di funzioni! Quale?
  - funzioni con derivate continue ...
  - ✓ funzioni con derivate distribuzionali integrabili (spazi di Sobolev, etc.)
- Esiste una soluzione? è unica? c'è dipendenza continua dai dati?
- Quanto sono regolari le soluzioni: u, $\boldsymbol{\sigma}(u)$ e $\ddot{u}$?
- Proprietà qualitative, convergenza e rapporto tra soluzioni.

◦ E come trovo le soluzioni?

⇨ Analisi Numerica

Millenium Prize Problem di 1.000.000 \$ del Clay Mathematical Institute:

"*existence and smoothness of solutions for Navier-Stokes equations*"

Corsi

- Analisi Funzionale (9CFU)

  Teoria degli spazi di Banach e di Hilbert e degli operatori.

- Analisi Funzionale ed Equazioni Differenziali (6CFU)

  Derivate distribuzionali.
  Spazi di Sobolev e PDE lineari ellittiche.

- Calcolo delle Variazioni (6CFU ad a.a. alterni)

  Problemi di minimo.
  Equazioni di Eulero-Lagrange e Γ-convergenza.

- Equazioni di Evoluzione (6CFU ad a.a. alterni)

  Equazioni del calore e dei mezzi porosi.
  Leggi di conservazione e flussi gradiente negli spazi metrici.

+ Ottimizzazione (3+3CFU)

Linee di ricerca e collaborazioni

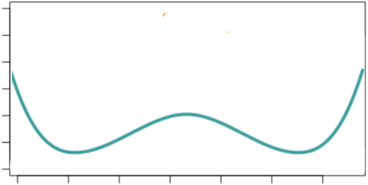
- Problemi di transizione di fase e applicazioni
  (crescita tumorale, cristalli liquidi, memoria di forma etc.),
- modelli variazionali nella meccanica del continuo
  (elasticità non-lineare, plasticità, frattura etc.),
- omogeneizzazione, Γ-convergenza e problemi con discontinuità libera,
- problemi di ottimizzazione e trasporto.

- Attrattori per sistemi dinamici in dimensione infinita,
- regolarità per equazioni di evoluzione,
- teoria geometrica della misura e superfici minime,
- flussi gradiente e analisi in spazi metrici.

Collaborazioni nazionali: Scuola Normale, SISSA, Roma, Milano, etc.

e internazionali

Energia w con doppio pozzo



$$F(u) = \tfrac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 + w(u)\, dx$$

la derivata (di Gateaux) "formalmente"

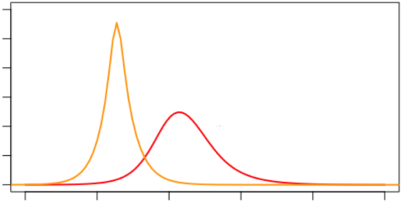
$$dF(u)[\xi] = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \xi \, + w'(u)\xi \, dx = \int_\Omega -\big(\Delta u - w'(u)\big)\xi \, dx$$

e il suo flusso gradiente L^2

$$\begin{cases} \dot{u} = \Delta u - w'(u) = \text{“} - \nabla_{L^2} F(u) \text{”} \text{ in } \Omega \\ \text{con condizioni al contorno e iniziali} \end{cases}$$

Equazione di Chan-Hilliard $\dot{u} = \Delta(u^3 - u - \varepsilon \Delta u)$ etc.

Spazi che non hanno una struttura vettoriale e hanno una metrica d.



$\mathcal{P}(\Omega)$ con metrica Wasserstein

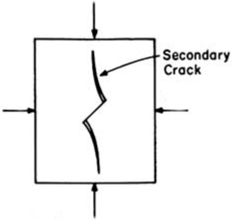
Come definisco un velocità? Come definisco una derivata? Il flusso gradiente?

$$F(u(t)) \leq F(u_0) - \frac{1}{2}\int_0^t |\partial F|^2(u(s)) + |u'(s)|^2\, ds$$

Movimenti minizzanti: costruzione induttiva da u_0 con passo temporale τ

$$u_k \in \operatorname{argmin}\left\{F(u) + \frac{1}{2}\tau^{-1} d^2(u, u_{k-1})\right\}$$

[De Giorgi]



Energie di Griffith in “spazi BV”

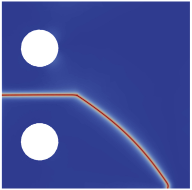
$$F(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus J_u} Du : \mathbf{C}Du\,dx + \mathcal{H}^{N-1}(J_u)$$

Approssimazione in spazi di Sobolev

$$F_\varepsilon(w,v) = \frac{1}{2}\int_\Omega (v^2+\eta_\varepsilon)Du : \mathbf{C}Du\,dx + \int_\Omega \varepsilon^{-1}(v-1)^2 + \varepsilon|\nabla u|^2\,dx$$

Evoluzioni quasi-statiche o dinamiche ... o “flussi gradiente unilaterali”

$$\begin{cases} \dot{v} = [-\nabla_{L^2}F_\varepsilon(u,v)]_+ \text{ in } \Omega \\ -\mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma}_v(u)) = 0 \\ \text{con condizioni al contorno e iniziali} \end{cases}$$

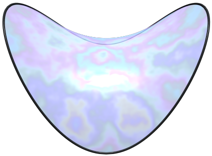
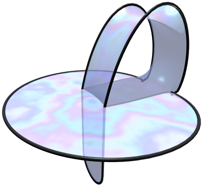
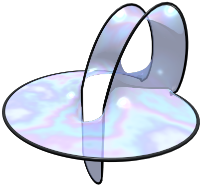


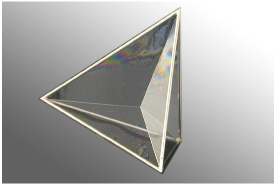
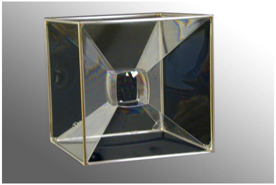
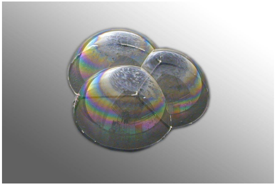
Anche per modelli di plasticità ...

In forma di grafico $u : B \to \mathbb{R}$ t.c. $u = g$ on ∂B

$$u \in \operatorname{argmin} \left\{ \int_B \sqrt{1 + |\nabla u|^2}\, dx \right\} \quad \Leftrightarrow \quad H = -\operatorname{div}\Big(\big(1 + |\nabla u|^2\big)^{-1/2} \nabla u \Big) = 0$$

Se non è un grafico ... possiamo parametrizzare $u : B \to \mathbb{R}$ t.c. $u = g$ on ∂B ... ma

['700 Lagrange, Plateau ... '900 De Giorgi, Almgren, ...]

Persone

P.L. Colli
S. Fornaro
U. Gianazza
S. Lisini
A. Marchese
M.G. Mora
M. Negri
E. Rocca
G. Savaré
G. Schimperna
A. Segatti
M. Veneroni
E. Vitali