COMPLEMENTI DI MATEMATICA PER L'INSEGNAMENTO

a.a. 2017-18

Assiomi, definizioni e teoremi di geometria: aspetti teorici e didattici

1. Introduzione

In questa parte si presentano anzitutto, molto sinteticamente, le trattazioni di riferimento su cui sarà basato il confronto tra specifiche definizioni e proposizioni di geometria elementare. Le trattazioni considerate sono quelle di Euclide, di Hilbert e di Prodi, molto diverse fra loro sia per collocazione storica che impianto teorico.

Per la trattazione di Euclide si è fatto riferimento al testo "Gli Elementi di Euclide" a cura di Attilio Frajese e Lamberto Maccioni edito da UTET nel 1970, per la trattazione di Hilbert il testo di riferimento è "Fondamenti della geometria" di David Hilbert edito da Feltrinelli nel 1970, mentre per la trattazione di Prodi si è fatto riferimento al progetto "Matematica come scoperta" di Giovanni Prodi edito dalla Casa Editrice D'Anna nel 1987 e in particolare ai testi "Geometria del piano" e "geometria dello spazio e oltre" indicati in Bibliografia.

2. Gli Elementi di Euclide

Gli Elementi di Euclide sono la più importante opera matematica giuntaci dalla cultura greca antica. Composti attorno al III secolo a.C., rappresentano un quadro completo e molto articolato dei principi della geometria noti al tempo e furono alla base della geometria fino al diciottesimo secolo. L'opera consiste in 13 libri: i primi sei riguardanti la geometria piana, i successivi quattro i rapporti tra grandezze e gli ultimi tre la geometria solida.

Qui si fa riferimento solo a I primo dei tredici libri. Esso è composto da 23 definizioni, 5 postulati, 8 nozioni comuni e 48 proposizioni. Nelle "definizioni" Euclide presenta tutti gli "enti geometrici" dei quali si occuperà nella sua trattazione. Il suo modo di concepire una definizione è essenzialmente diverso dal nostro; infatti nelle definizioni Euclide descrive elementi che sono "esistenti in natura", come spiegano Frajese e Maccioni (pag. 48): "non si tratta per loro (i matematici greci) di costruire concetti, quasi di creare nel nostro spirito quegli enti geometrici che vengono considerati: si tratta

invece soltanto di descriverli, affinché possano essere facilmente riconosciuti attraverso una soddisfacente nomenclatura. Questi enti geometrici, cioè, esistono già: la definizione ha per Euclide soltanto il senso di individuarli. Ecco perché negli Elementi troviamo all'inizio, al primo posto, proprio quella definizione di punto alla quale la sistemazione moderna, partendo da altre vedute, ha rinunziato. Gli enti geometrici sono quelli della nostra intuizione, e son concepiti come realmente esistenti al di fuori di noi."

Ecco le ventitré **DEFINIZIONI** di Euclide:

- I. Punto è ciò che non ha parti.
- II. Linea è lunghezza senza larghezza.
- III. Estremi di una linea sono punti.
- IV. Linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai punti su essa.
- V. Superficie è ciò che ha soltanto larghezza e lunghezza.
- VI. Estremi di una superficie sono linee.
- VII. Superficie piana è quella che giace ugualmente rispetto alle rette su essa.
- VIII. Angolo piano è l'inclinazione reciproca di due linee su un piano, le quali s'incontrino tra loro e non giacciano in linea retta.
 - IX. Quando le linee che comprendono l'angolo sono rette l'angolo si chiama rettilineo.
 - X. Quando una retta innalzata su un'altra retta forma gli angoli adiacenti uguali tra loro, ciascuno dei due angoli uguali è retto, e la retta innalzata si chiama perpendicolare a quella su cui è innalzata.
 - XI. Angolo ottuso è quello minore di un retto.
- XII. Angolo acuto è quello minore di un retto.
- XIII. Termine è ciò che è estremo di qualche cosa.
- XIV. Figura è ciò che è compresa da uno o più termini.
- XV. Cerchio è una figura piana compresa da un'unica linea, che si chiama circonferenza, tale che tutte le rette, le quali cadano sulla circonferenza a partire da un punto fra quelli che giacciano internamente alla figura, sono uguali tra loro.

- XVI. Quel punto si chiama centro del cerchio.
- XVII. Diametro del cerchio è una retta condotta per il centro e terminata da ambedue le parti della circonferenza del cerchio, la quale retta taglia anche il cerchio per metà.
- XVIII. Semicerchio è la figura compresa dal diametro e dalla circonferenza da esso tagliata. E centro dello stesso semi cerchio è quello stesso che è anche centro del cerchio.
- XIX. Figure rettilinee sono quelle comprese tra rette, vale a dire: figure trilatere quelle comprese da tre rette, quadrilatere quelle comprese da quattro e multilatere quelle comprese da più di quattro rette.
- XX. Delle figure trilatere, è triangolo equilatero quello che ha tre lati uguali, isoscele quello che ha soltanto due lati uguali e scaleno quello che ha i tre lati disuguali.
- XXI. Infine , delle figure trilatere, è triangolo rettangolo quello che ha un angolo retto, ottusangolo quello che ha un angolo ottuso ed acutangolo quello che ha tre angoli acuti.
- XXII. Delle figure quadrilatere, è quadrata quella che è insieme equilatera ed ha gli angoli retti, rettangolo quella che ha gli angoli retti, ma non è equilatera, rombo quella che è equilatera, ma non ha gli angoli retti, romboide quella che ha i lati e gli angoli opposti uguali tra loro, ma non è equilatera e non ha gli angoli retti. E le figure quadrilatere oltre a queste si chiamano trapezi.
- XXIII. Parallele sono quelle rette che, essendo nello stesso piano e venendo prolungate illimitatamente dall'una e dall'altra parte, non si incontrano fra loro da nessuna delle due parti.

OSSERVAZIONI

Dalle definizioni III e IV si deduce che Euclide parla di "linea retta" riferendosi a quello che noi chiamiamo segmento, dunque una retta risulta limitata, compresa fra due punti che ne costituiscono gli estremi.

La definizione X propone sia la definizione di angolo retto (un angolo è retto se è uguale al suo adiacente), sia la definizione di rette perpendicolari (due rette sono perpendicolari se si incontrano e formano angoli retti).

La definizione XIV riguarda ciò che Euclide intende per figura in generale: è evidente che si tratta di qualcosa di limitato, perché compreso da "termini", cioè da "punti" e "linee", dunque da punti e segmenti (rettilinei oppure no).

Le definizioni XV e XVI caratterizzano la circonferenza e il cerchio e, anche se in modo un po' complesso, propongono le nostre usuali rispettive definizioni.

Nelle definizioni XX, XXI e XXII si parla di triangoli, quadrilateri e poligoni più generali; si definiscono poi i triangoli equilateri, isosceli, rettangoli: è interessante confrontare tali definizioni con quelle a noi famigliari, per rilevarne analogie e differenze. (Svolgere come esercizio)

La definizione XXIII riguarda le rette parallele: è da notare che si parla di "prolungare illimitatamente" le rette dall'una e dall'altra parte, proprio perché, come si è notato, le "rette" di Euclide sono i nostri "segmenti", che dunque ha senso pensare di prolungare. Come osservano Frajese e Maccioni (pag.48) "... la linea retta non viene concepita da Euclide come attualmente infinita, ma infinita potenzialmente: cioè nel senso che qualunque retta limitata (=segmento di retta) può sempre essere ancora prolungata."

I cinque "**POSTULATI**" sono proposizioni che si riferiscono agli enti geometrici prima definiti, sono cioè, per Euclide, delle verità assolute che sono talmente riscontrabili nella realtà che non hanno bisogno di dimostrazione. Essi sono:

- I. Si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto a un qualsiasi altro.
- II. Una retta terminata (finita) si possa prolungare continuamente in linea retta.
- III. Si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro e ogni distanza (raggio).
- IV. Tutti gli angoli retti siano uguali tra loro.
- V. Se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti (la loro somma minore di due retti), le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due rette.

Osserviamo che il V Postulato è quello che risulta equivalente all'unicità della parallela, anche se ciò potrebbe non apparire così evidente.

Le "NOZIONI COMUNI" sono anch'esse proposizioni evidenti ma sono intese comuni alla geometria ed ad altri campi della conoscenza. Esse sono:

- I. Cose che sono uguali ad una stessa cosa sono uguali anche fra loro.
- II. Se cose uguali sono addizionate a cose uguali le totalità sono uguali.
- III. Se da cose uguali sono sottratte cose uguali, i resti sono uguali.

- IV. Se cose uguali sono addizionate a cose disuguali le totalità sono disuguali.
- V. I doppi di una stessa cosa sono uguali tra loro.
- VI. Metà di una stessa cosa sono uguali tra loro.
- VII. Cose che coincidono fra loro sono fra loro uguali.
- VIII. Il tutto è maggiore della parte.

Si può osservare che in queste formulazioni il termine "uguali" è interpretabile, nella maggior parte dei casi, con il nostro termine "equivalenti", specie in riferimento all'ambito geometrico, mentre invece in ambito aritmetico....: si possono trovare esempi che illustrano quanto affermato (farlo per esercizio).

La proposizione VIII può sembrare del tutto ovvia ma si possono trovare esempi, ad esempio in aritmetica, che mettono in evidenza che la proposizione non risulta sempre valida e dunque averla posta come nozione comune indica che l'ambito di riferimento ha certe caratteristiche, non banalmente sempre vere. (Trovare esempi, in aritmetica, interpretando il significato di "tutto", "parte" e "maggiore" e in cui la proposizione VIII sia falsa).

Le 48 "PROPOSIZIONI", seguite dalle rispettive dimostrazioni, sono concatenate tra loro fino ad arrivare alla meta del primo libro costituita dal teorema di Pitagora, cui sono dedicate le proposizioni 47 e 48. Le proposizioni del primo libro si possono dividere in due parti: la prima costituita dalle prime 28 proposizioni, che non utilizzano il quinto postulato, e la seconda costituita dalle rimanenti proposizioni, che utilizzano il quinto postulato. Questo perché il quinto postulato non è così evidente come gli altri quattro e per questo Euclide lo utilizza il più tardi possibile, evidenziando qualche riserva su di esso.

Per secoli i matematici hanno ritenuto che il quinto postulato dovesse essere una conseguenza dei primi quattro e si sono adoperati, inutilmente, per dimostrarlo, a cominciare da Proclo (IV secolo a.C.) fino a Saccheri (1667-1733) il quale negò la validità del quinto postulato al fine di arrivare ad una contraddizione e, conseguentemente, dimostrare per assurdo la validità del medesimo. Saccheri gettò invece inconsapevolmente le basi per la trattazione delle geometrie non euclidee, come la "geometria ellittica" sviluppata da Riemann e la "geometria iperbolica" sviluppata da Bolyai e Lobachevsky.

3. Gli assiomi di Hilbert

Nel 1899 David Hilbert (1862 – 1943) si pose il problema di dare un fondamento assiomatico rigoroso alla geometria, ossia di descrivere la geometria euclidea senza lasciare nessun assioma inespresso. Giunge così a presentare 28 assiomi, elencati nel suo lavoro Grundlagen der Geometrie (Fondamenti della Geometria). Molti di questi assiomi sono assunti implicitamente da Euclide negli Elementi. Ad esempio, Euclide non dice mai espressamente "esiste almeno un punto esterno alla retta", o "dati tre punti non allineati, esiste un solo piano che li contiene", eppure li utilizza implicitamente in molte dimostrazioni.

Nella concezione moderna una teoria assiomatica comprende:

- <u>Termini primitivi</u>, cioè concetti o relazioni che non vengono definiti, ma sono usati per definire altri concetti e relazioni.
- <u>Termini definiti</u>, cioè concetti e relazioni che vengono definiti combinando direttamente i termini primitivi o termini già definiti.
- <u>Postulati</u> o <u>assiomi</u>, cioè proposizioni che non vengono dimostrate, per libera scelta dell'autore, ma che poste a fondamento per la dimostrazione di altre proposizioni.
- <u>Teoremi</u>, cioè proposizioni che vengono dimostrate utilizzando i postulati o altri teoremi già dimostrati.

Nella trattazione geometrica di Hilbert sono evidenti alcuni "concetti primitivi" e alcune "relazioni primitive", anche se non dichiarati esplicitamente. Essi possono essere quindi enti qualunque, come dice Hilbert potrebbero essere sedie, tavoli o boccali di birra, ma acquisiranno significato attraverso gli assiomi che li collegano. La differenza sostanziale tra gli assiomi di Hilbert e quelli di Euclide è che essi non esprimono nessun contenuto che non sia quello delle loro mutue relazioni di tipo puramente logico. Cioè gli assiomi non sono verità evidenti, ma definizioni implicite dei termini primitivi che essi contengono.

I concetti primitivi nella teoria di Hilbert sono:

- Punti
- Rette
- Piani

Essi sono in certe relazioni reciproche, primitive anch'esse, che sono:

- Giacere
- Fra
- Congruente

Hilbert si esprime in questo modo:

"Spiegazione - Consideriamo tre diversi sistemi di oggetti: chiamiamo *punti* gli oggetti del primo sistema e li indichiamo con A, B, C,...; chiamiamo *rette* gli oggetti del secondo sistema e li indichiamo con a, b, c,...; chiamiamo *piani* gli oggetti del terzo sistema e li indichiamo con α , β , γ ,...; i punti si chiamano anche gli *elementi della geometria della retta*, i punti ed i piani gli *elementi della geometria solida o dello spazio*.

Noi consideriamo punti, rette ed i piani in certe relazioni reciproche ed indichiamo queste relazioni con parole come "giacere", "fra", "congruente"; la descrizione esatta e completa ai fini matematici, di queste relazioni segue dagli *assiomi della geometria*." (Hilbert, pag 3).

Hilbert nella sua trattazione divide i ventotto assiomi in cinque gruppi a cui fare seguire poi i teoremi che ne derivano. Le formulazioni degli assiomi seguenti sono coerenti con quelle del testo di riferimento citato ma per il primo gruppo si sono adottate le modalità che si sono ritenute più familiari.

I Assiomi di collegamento

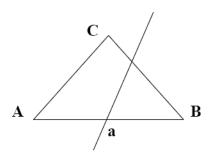
- 1. Per due punti A, B c'è sempre una retta a che passa per ognuno dei due punti A, B.
- 2. Per due punti A, B c'è al massimo una retta a che passa per ognuno dei due punti A, B.
- 3. Su una retta ci sono sempre due punti. Ci sono almeno tre punti che non giacciono su una retta.
- 4. Per tre punti qualsiasi A, B, C che non giacciono su una stessa retta, c'è sempre un piano α che passa per i tre punti A, B, C. Per ogni piano c'è sempre un punto che gli appartiene.
- 5. Per tre punti qualsiasi A, B, C che non giacciono su una stessa retta, c'è al massimo un piano α che passa per i tre punti A, B, C.

- 6. Se due punti A, B di una retta a giacciono in un piano, allora ogni punto di a è nel piano α .
- 7. Se due piani α , β hanno in comune un punto A allora hanno in comune almeno un altro punto B.
- 8. Ci sono almeno quattro punti che non stanno in un piano.

Si può notare che gli assiomi 7. e 8. garantiscono che lo spazio di cui si sta costruendo la teoria non ha più di tre dimensioni e allo stesso tempo ne ha più di due, cioè non ci si limita alla geometria del piano: tale spazio ha dunque esattamente tre dimensioni.

II Assiomi di ordinamento

- 1. Se un punto B giace tra un punto A ed un punto C, allora A, B, C sono tre punti distinti di una retta e B giace pure fra C ed A.
- 2. Per ogni due punti A e C, c'è sempre almeno un punto B, sulla retta AC, tale che C giace fra A e B.
- 3. Di tre punti qualsiasi di una retta ce n'è al massimo uno che giace fra gli altri due.
- 4. Siano A, B, C tre punti non allineati ed a una retta del piano ABC che non passi per alcuno dei punti A, B, C allora, se la retta a passa per un punto del segmento AB essa passa certamente anche per un punto del segmento AC o per un punto del segmento BC.



Si può osservare che a seguito degli assiomi di ordinamento sono possibili le definizioni di segmento, semiretta, semipiano e semispazio.

III Assiomi di congruenza

Spiegazione. – I segmenti stanno fra loro in una certa relazione per la cui descrizione ci servono le parole "congruente" oppure "uguale".

1. Se A, B sono due punti di una retta a ed inoltre A' è un punto sulla stessa retta o su un'altra retta a', si può sempre trovare un punto B', da una data parte della retta a' rispetto ad A', tale che il segmento AB sia congruente, ovvero uguale, al segmento A'B'; in simboli

AB≡A'B'.

- 2. Se un segmento A'B' e un segmento A"B" sono congruenti ad uno stesso segmento AB, allora anche il segmento A'B' è congruente al segmento A"B"; ovvero, brevemente: se due segmenti sono congruenti ad un terzo, essi sono congruenti fra loro.
- 3. Siano AB e BC due segmenti senza punti in comune su una retta a ed A'B' e B'C' due segmenti sulla stessa retta o su un'altra retta a', sempre senza punti in comune allora, se è $AB \equiv A'B' \ e \ BC \equiv B'C' \ e \ pure \ AC \equiv A'C'.$
- 4. Siano dati un angolo < (h, k) in un piano α ed una retta a' in un piano α' , come pure un determinato lato di a' in α' . Si indichi con h' una semiretta della retta a', che abbia origine nel punto O': c'è allora nel piano α' una e una sola semiretta k', tale che l'angolo < (h, k) è congruente all'angolo < (h', k') ed allo stesso tempo tutti i punti interni all'angolo < (h', k') stanno dalla stessa parte di a'; in simboli

$$<$$
 (h, k) \equiv $<$ (h', k').

Ogni angolo è congruente a se stesso, cioè si ha sempre

$$<$$
 (h, k) \equiv $<$ (h, k).

5. Se per due triangoli ABC ed A'B'C' valgono le congruenze

$$AB \equiv A'B'$$
, $AC \equiv A'C'$, $< BAC \equiv < B'A'C'$

allora è sempre valida anche la congruenza

$$< ABC \equiv < A'B'C'$$
.

Osserviamo che l'assioma 5. collega congruenza fra segmenti e congruenza fra angoli in un triangolo; insieme agli altri assiomi pone le premesse per i criteri di congruenza fra triangoli.

Riprenderemo più avanti il concetto di congruenza tra figure.

IV Assioma delle parallele

1. (Assioma euclideo) Siano a una qualsiasi retta ed A un punto fuori di a: allora c'è, nel piano definito da A e da a, al massimo una retta che passa per A e che non interseca la retta a.

OSSERVAZIONI

Si può notare che l'assioma delle parallele stabilisce l'unicità della parallela per un punto ad una retta: l'esistenza di tale parallela può essere invece dimostrata in base alle proposizioni precedenti (essenzialmente: se due rette tagliate da una trasversale formano angoli alterni interni uguali allora, per il teorema dell'angolo esterno¹, non si intersecano e dunque sono parallele).

E' interessante ricordare alcune proposizioni che sono dipendenti dall'unicità della parallela ed essenzialmente equivalenti ad essa, anche se non appare così esplicito il loro legame con l'assioma dell'unicità:

In un triangolo la somma degli angoli interni è un angolo piatto;

L'angolo inscritto in una semicirconferenza è retto;

L'angolo al centro di una circonferenza è doppio dell'angolo alla circonferenza corrispondente;

Il teorema di Pitagora;

Il rapporto tra una circonferenza e il suo diametro è costante;

Il rapporto tra la diagonale e il lato di un quadrato è costante.

V Assiomi di continuità

- 1. (Assioma della misura o assioma archimedeo) Se AB e CD sono due segmenti qualsiasi, c'è un numero n tale che il trasporto del segmento CD reiterato n volte da A sulla semiretta passante per B, porta al di là del punto B.
- 2. (Assioma di completezza lineare) Il sistema dei punti di una retta con le sue relazioni di ordinamento e congruenza non è suscettibile di un ampliamento per il quale rimangono inalterate le relazioni sussistenti tra gli elementi precedenti come pure le proprietà fondamentali di ordinamento lineare e congruenza che seguono dagli assiomi I, III e V 1.

OSSERVAZIONI

Nel seguito non ci si occuperà degli assiomi di continuità tuttavia sembra importante ricordare che da loro dipendono alcune proposizioni di geometria elementare che si conoscono dalla scuola dell'obbligo, ad esempio le seguenti:

¹ Ci si riferisce alla formulazione generale di questo teorema, cioè "In un triangolo un angolo esterno è maggiore di ogni angolo interno non adiacente", valido indipendentemente dall'unicità della parallela e dunque prima dell'assioma IV.

- una retta che disti dal centro di una circonferenza meno del raggio della circonferenza, la interseca esattamente in due punti;
- due circonferenze si intersecano in due punti se la distanza tra i loro centri è minore della somma dei loro raggi;
- una circonferenza può essere suddivisa in n parti uguali (ciclotomia)
- esiste sempre il rapporto fra due segmenti (teoria della misura).

4. Gli assiomi di Prodi

Giovanni Prodi (1925 – 2010) nel suo progetto "Matematica come scoperta" propone un itinerario curricolare per gli studenti delle scuole superiori. Con l'intento di una trattazione che non sia puramente nozionistica ma che faccia riflettere lo studente precisa che la sua idea di base è che il modo più autentico di fare matematica sia quello di risolvere problemi. Nessuno può negare l'importanza di una teoria che inquadri organicamente le singole nozioni, tuttavia un insegnamento della matematica che avesse come unico scopo l'acquisizione di risultati e di tecniche, senza provocare un'attività di ricerca e di elaborazione sarebbe, in definitiva, controproducente. La metodologia che si richiede per questo tipo di insegnamento è, ovviamente l'educazione a pensare ed è l'obiettivo che Prodi si propone di raggiungere con il suo progetto attraverso opportune indagini e riflessioni.

Prodi nella sua trattazione geometrica si ispira all'Appendice 1 del testo "L'insegnamento della geometria (Feltrinelli)" di G. Choquet e ne propone una versione più semplice, così che possa essere adatta anche a studenti delle scuole superiori.

Prodi spiega con queste parole come vuole fondare la sua trattazione della geometria del piano: " ... vogliamo procedere con un metodo che, dal punto di vista scientifico, è molto più incisivo: ammesse alcune proprietà fondamentali, vogliamo dedurre da esse, mediante il ragionamento, tutte le proprietà che ci interessano. Quando si fa un ragionamento, si stabilisce la verità di un'affermazione sulla base di altre affermazioni che si suppongono vere: non si può dunque fare a meno di ammettere alcune affermazioni non dimostrate, su cui tutte le altre si appoggiano così come un edificio si appoggia sulle fondazioni. Queste affermazioni primitive da cui tutte le altre si possono dedurre si dicono assiomi (o anche postulati). Gli assiomi possono essere scelti con una certa libertà, ma devono avere una grande evidenza intuitiva, almeno se vogliamo che la geometria offra una descrizione fedele dello spazio che ci circonda." (Prodi, Bastianoni, pag. 15)

Vediamo ora quali sono le proposizioni scelte da Prodi come assiomi²:

- Per tutte le coppie di punti P, Q dell'insieme S è assegnato un numero reale ≥0 che si dice distanza di P da Q e si indica con d(P,Q). la distanza ha le seguenti proprietà:
 - I. Se i punti P, Q sono distinti è d(P, Q)>0, se coincidono è d(P, Q)=0.
 - II. d(P, Q)=d(Q, P) (proprietà di simmetria).
 - III. $d(P, Q) \le d(P, R) + d(R, Q)$ (disuguaglianza triangolare).
- 2. Per due punti distinti passa una ed una sola retta.
- 3. Nel piano ci sono almeno tre punti non allineati.
- 4. Su ogni retta esistono due relazioni di ordine, fra loro opposte, con questa proprietà:
 - se è A<B<C allora è AC=AB+BC (2)
 - viceversa se, dati tre punti A, B, C vale l'uguaglianza (2), allora il punto B è allineato con A
 e C e si ha A<B<C, oppure C<B<A.
- 5. Fissata una semiretta U di origine O e fissato un numero reale positivo x esiste sulla semiretta un unico punto P tale che OP = x.
- 6. Data nel piano una retta \Re , l'insieme complementare di \Re risulta suddiviso in due regioni dette **semipiani**, con la seguente proprietà:
 - I. il segmento che congiunge due punti di uno stesso semipiano non taglia la retta R.
 - II. il segmento che congiunge due punti di semipiani distinti taglia la retta ${\mathfrak R}$
- 7. Data una qualunque retta \Re del piano, esiste una ed una sola simmetria assiale di asse \Re .
- 8. Data una retta \Re ed un punto P di essa, esiste un'unica retta \Im perpendicolare ad \Re e passante per \mathscr{P} .
- 9. È unica la parallela mandata ad una retta da un punto ad essa esterno.

² Nell'elenco degli assiomi si è scelto di sostituire l'assioma della costanza del rapporto di proiezione (che compariva nelle prime due edizioni del progetto) con l'assioma dell'unicità della parallela (9.), che risulta più familiare e che compare nelle ultime edizioni dello stesso progetto, citate in bibliografia.

 $^{^3}$ Preciseremo più avanti sia la definizione di simmetria di asse ${\mathfrak R}$ sia la relazione di perpendicolarità fra rette.

- 10. Esiste un'unica applicazione (detta **misura angolare**) che fa corrispondere ad ogni angolo del piano un numero reale non negativo con le seguenti proprietà:
 - I. La misura dell'angolo (\Re, \mathbb{S}) è zero se e solo se $\Re = \mathbb{S}$, la misura di un qualsiasi angolo piatto è un numero p positivo fissato. Spesso, a motivo di una tradizione che risale agli astronomi babilonesi, si pone p = 180; si dice allora che gli angoli sono misurati in gradi sessagesimali. A volta conviene invece porre p = π (la lunghezza di una semicirconferenza di raggio 1) e si dice allora che gli angoli sono misurati in radianti.
 - II. Se \mathfrak{F} è una semiretta interna all'angolo $(\mathfrak{R},\mathfrak{S})$, la misura dell'angolo $(\mathfrak{R},\mathfrak{S})$ è uguale alla somma della misura dell'angolo $(\mathfrak{R},\mathfrak{F})$ e della misura dell'angolo $(\mathfrak{F},\mathfrak{F})$.

 (proprietà dell'additività della misura).
 - III. Per ogni numero α con $0 \le \alpha \le p$, esiste un angolo che ha misura α . (proprietà di suriettività della misura).
 - IV. Se esiste un'isometria che trasforma (\Re, \mathbb{S}) nell'angolo (\Re', \mathbb{S}') , i due angoli (\Re, \mathbb{S}) ed (\Re', \mathbb{S}') hanno la stessa misura. (Invarianza della misura rispetto alle isometrie).

OSSERVAZIONI

È evidente, in questa trattazione, che fin dall'inizio si è scelto di collegare molto strettamente gli elementi della geometria al mondo dell'aritmetica; negli assiomi che abbiamo visto in Euclide e in Hilbert non c'è invece alcun collegamento all'aritmetica, che nelle loro rispettive trattazioni viene presentato negli sviluppi successivi. Già il primo assioma di questa teoria, dunque, collega una qualsiasi coppia di punti ad un numero reale positivo, la loro distanza; con l'assioma 5, poi, si può ottenere la corrispondenza biunivoca tra una qualsiasi retta e l'insieme dei numeri reali. Ecco come si esprime l'autore a questo proposito: "... con questo assioma si stabilisce una corrispondenza biunivoca fra i numeri reali positivi e i punti di una semiretta u; possiamo completare la corrispondenza associando ai numeri reali negativi i punti della semiretta opposta aventi da O distanza uguale al valore assoluto del numero e facendo corrispondere allo zero il punto O. In questo modo, otteniamo una corrispondenza biunivoca fra i punti di una retta e i numeri reali." (Prodi, Bastianoni, pag. 21)

Una seconda notevole differenza è il ricorso al concetto di funzione (in particolare il concetto di isometria e di simmetria assiale), ovviamente assente nella trattazione di Euclide ma anche in quella di Hilbert e invece fondamentale nella costruzione della geometria piana di Prodi. Vedremo in ciò che segue, infatti, come nella trattazione di Prodi sia centrale il concetto di isometria (e in particolare

di simmetria assiale) nel caso della definizione dell' angolo retto, della perpendicolarità fra rette e della congruenza tra figure.

5. Le definizioni di angolo, angolo retto, rette perpendicolari, rette parallele e congruenza in Euclide, Hilbert e Prodi

5.a La definizione di angolo

Euclide nel suo primo libro degli "Elementi" propone la definizione di "angolo piano" nella proposizione VIII, che qui si riporta per comodità:

VIII. Angolo piano è l'inclinazione reciproca di due linee (dette lati dell'angolo) su un piano, le quali si incontrino tra loro in un punto (detto vertice dell'angolo) e non giacciano in linea retta.

Poi precisa, nella definizione successiva:

IX. Quando le linee che comprendono l'angolo sono rette l'angolo si chiama rettilineo.

Si può notare che l'espressione "inclinazione reciproca" non sia molto chiara, tuttavia è evidente come questa definizione sia più generale di quella adottata usualmente, comprendendo ad esempio anche gli angoli chiamati "angoli di contatto o di contingenza" come quello formato da una circonferenza e da una retta ad essa tangente in un punto.



Il nostro concetto di angolo è più vicino alla definizione IX che tuttavia, unita alla VII, esclude che si considerino angoli piani che siano "piatti", poiché si richiede che le linee non siano sulla stessa retta.

Hilbert nel suo libro "Fondamenti della geometria" definisce l'angolo dopo aver enunciato gli assiomi di collegamento, di ordinamento e i primi tre assiomi di congruenza, appena prima di enunciare il quarto assioma di congruenza che riguarda, appunto, la possibilità del *trasporto* dell'angolo. Ecco come si esprime:

"Spiegazione - Sia α un qualsiasi piano ed h,k due qualsiasi semirette distinte in α , aventi origine in uno stesso punto O, che appartengano a rette diverse. Chiamiamo angolo il

sistema di queste due semirette h,k e lo indichiamo con <(h,k) o con <(k,h). Le semirette h,k si chiamano lati dell'angolo ed il punto O si chiama vertice dell'angolo.

Da questa definizione restano esclusi angoli piatti e concavi." (Hilbert, pag. 13).

Anche in Hilbert, come in Euclide, non viene dunque compreso il nostro "angolo piatto" tra gli angoli delle rispettive trattazioni. Anche il nostro "angolo concavo" non è compreso nelle loro definizioni, infatti Euclide parla di "inclinazione reciproca" quindi ovviamente non può essere maggiore di un angolo piatto, mentre Hilbert considera il sistema di due semirette quindi non prevede distinzione tra l'angolo concavo e quello convesso.

Più precisamente Hilbert definisce nel seguente modo la regione interna e quella esterna dell' angolo <(h, k):

"La semiretta h appartenga alla retta \underline{h} e la semiretta k alla retta \underline{k} . Le semirette h e k, prese insieme al punto O, dividono i rimanenti punti in due regioni: si dicono posti all'*interno* dell'angolo <(h, k) tutti i punti che stanno con h dalla medesima parte di \underline{k} e con k dalla medesima parte di \underline{h} ; tutti gli altri punti si dicono posti all'esterno, ovvero fuori dall'angolo." (Hilbert, pag. 14)

Nel progetto "Matematica come scoperta" Prodi definisce l'angolo dopo aver trattato i primi cinque assiomi, nel modo seguente:

"Si dice angolo una coppia di semirette aventi la stessa origine.

L'angolo può essere indicato con la notazione (\mathbf{r}, \mathbf{s}) (dove \mathbf{r} e \mathbf{s} sono le semirette in questione, che vengono dette *lati* dell'angolo); il punto origine comune alle due semirette è chiamato *vertice* dell'angolo.

... se le due semirette **r** e **s** non sono allineate, all'angolo (**r**, **s**) viene associato, nel modo che ora presentiamo, un certo insieme convesso, che si può chiamare *regione angolare*, ma che usualmente è esso stesso chiamato *angolo*. Precisamente, consideriamo il semipiano individuato da **r** che contiene la semiretta **s** (evidentemente, la semiretta **r** fa parte di una retta, che è bordo di due semipiani: di questi due semipiani, scegliamo quello che contiene la semiretta **s**). Alla stessa maniera, consideriamo il semipiano individuato da **s** che contiene la semiretta **r**. L'intersezione di questi due semipiani è appunto l'insieme convesso che associamo all'angolo (**r**, **s**).

... Se le due semirette **r**, **s** sono semirette opposte di una stessa retta, l'angolo si dice *piatto*. Non è più individuata un'unica regione angolare, essendovi due semipiani il cui bordo contiene sia **r** che **s**" (Prodi, Bastianoni, pag. 26-27) Prodi dunque, nella sua definizione di angolo, a differenza di Hilbert ed Euclide comprende anche l' "angolo piatto" ma, in analogia con entrambi, propone una prima definizione che si limita a considerare l'angolo come coppia di semirette, anche se poi, dopo aver parlato di regione angolare, dichiara che la regione angolare stessa può essere chiamata "angolo". E' evidente dunque che Prodi vuole limitare il discorso alla regione convessa individuata dalla coppia di semirette.

Osserviamo che nella trattazione di Prodi, a differenza che in Hilbert, l'angolo è comunque da considerare una coppia *ordinata* di semirette con l'origine in comune: questa scelta, che non è esplicita nella definizione di angolo, è comunque precisata dall'autore più avanti (Prodi, Bastianoni, pag. 223), quando le rotazioni vengono collegate agli angoli e dove, quindi, risulta essenziale considerare l'ordinamento fra le due semirette.

5.b L'angolo retto e la perpendicolarità fra rette

Euclide nel suo primo libro degli "Elementi" definisce "angolo retto" e "retta perpendicolare" nella definizione X in questo modo:

X. Quando una retta innalzata su un'altra retta forma gli angoli adiacenti uguali tra loro, ciascuno dei due angoli uguali è retto, e la retta innalzata si chiama perpendicolare a quella su cui è innalzata.

Hilbert, appena dopo aver enunciato gli assiomi di congruenza, definisce il concetto di "angoli adiacenti" per poi successivamente definire "angolo retto" in questo modo:

"Spiegazione. - Si chiamano adiacenti due angoli aventi vertice ed un lato i comune ed i due lati non comuni formanti una retta. ... Un angolo, che sia uguale ad uno dei suoi adiacenti, si chiama retto." (Hilbert, pag. 16)

Le due definizioni quindi sono abbastanza simili tra loro ma poi le due trattazioni differiscono nel dimostrare l'esistenza di un angolo retto; non si approfondisce qui questa tematica.

Molto differente è invece la trattazione di Prodi, perché il concetto di "perpendicolarità tra rette" precede la definizione di "angolo retto" ed utilizza in modo essenziale il concetto di simmetria assiale. Vediamo anzitutto come viene presentato il concetto di "isometria":

"Si dice **isometria** (o **congruenza**) un'applicazione bigettiva del piano in sè che conserva le distanze, cioè tale che per ogni coppia di punti (P,Q) valga la relazione: P'Q'=PQ indicando con f la nostra applicazione, e ponendo f(P)=P', f(Q)=Q'," (Prodi, Bastianoni, pag. 50).

Successivamente si definisce la "simmetria assiale" ⁴ in questo modo:

"Data nel piano una retta r, si dice **simmetria assiale** (o **ribaltamento**) di asse r un'isometria che ha queste proprietà:

- 1) Lascia fissi tutti punti dell'asse \Re e porta ciascuno dei due semipiani generati da \Re nell'altro.
- 2) È involutoria (cioè: applicata due volte ci dà l'identita)"

Dopo queste premesse si definisce una "retta perpendicolare" in questo modo:

"Una retta s si dice **perpendicolare** (o anche **ortogonale**) ad r se è diversa da r e se viene trasformata in sè dalla simmetria di asse r." (Prodi, Bastianoni, pag. 57)

Si dimostra poi che la relazione di perpendicolarità è simmetrica e quindi è possibile usare l'espressione : le rette r e s sono fra loro perpendicolari

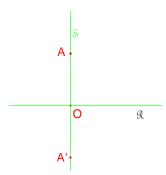
Ed infine si definisce l'"angolo retto" osservando che quando due rette sono perpendicolari allora formano coppie di angoli adiacenti e isometrici (e dunque uguali fra loro): questi angoli si dicono retti.

È interessante vedere come Prodi dimostra l'esistenza della retta perpendicolare e quindi dell'angolo retto. Dopo aver definito la simmetria assiale è anzitutto proposto l'assioma che ne assicura l'esistenza, che qui richiamiamo:

"7. Data una qualunque retta $\mathfrak R$ del piano, esiste una ed una sola simmetria assiale di asse $\mathfrak R$."

e si mostra come sia possibile costruire una retta perpendicolare ad una retta data e passante per un punto esterno alla retta data. Il procedimento è il seguente:

"Indicando con S_R la simmetria di asse R; A sia un punto che non appartiene ad R e sia $A \to A'$; allora , per il carattere involutorio della simmetria, si ha $A' \to A$.



⁴ Qui si è preferito proporre la definizione delle prime edizioni del progetto, che precisa subito l'involutorietà dell'applicazione.

_

Consideriamo la retta S che passa per A e per A'; dalla simmetria (che è un'isometria) essa viene trasformata in una retta che passa per A' (corrispondente di A) e per A (corrispondente di A'). Ma, poiché c'è un unica retta che passa per due punti, la retta S' trasformata di S coincide con S.

Il fatto che S viene trasformata in sé dalla simmetria non significa per nulla che i singoli punti di S rimangano fissi; anzi c'è solamente un punto che rimane fisso: il punto di incontro O della retta S con la retta R. (questo punto di incontro esiste senza dubbio perché i punti A, A' stanno in semipiani opposti, perciò il segmento AA' taglia R). la retta S si spezza in due semirette con origine O: ciascuna di esse viene mutata nell'altra dalla simmetria." (Prodi, Bastianoni, pag. 56)

L'esistenza di una retta perpendicolare ad una retta data e passante per un punto dato esterno ad essa deriva quindi dall'assioma A7, che assicura l'esistenza della simmetria assiale.

Prodi successivamente pone per comodità come assioma 8 l'esistenza di una retta perpendicolare ad una retta data e passante per un punto appartenente ad essa.

Nella trattazione di Euclide, e come pure di Hilbert, non risulta dalla definizione di angolo retto che tutti gli angoli retti siano uguali tra loro, come fanno notare Frajese e Maccioni (pag. 50): "Va precisato che nella definizione decima Euclide introduce gli angoli retti; quando una retta innalzata sopra un'altra, forma con questa angoli uguali, ciascuno di detti angoli è chiamato « angolo retto» (e la prima retta è detta perpendicolare alla seconda). Dunque gli angoli retti sono già uguali per definizione, ma soltanto a due a due quando sono adiacenti: non risulta, invece dalla definizione che siano uguali tra loro due angoli retti situati in modo qualunque sul piano, cioè senza che l'uno sia adiacente all'altro. "

Euclide pone come quarto assioma proprio l'uguaglianza fra gli angoli retti, in questo modo:

IV. E che tutti gli angoli retti siano uguali tra loro.

Hilbert dimostra la stessa proposizione nel teorema 21, di cui si tralascia qui la dimostrazione:

"Teorema 21. - Tutti qli angoli retti sono congruenti tra loro." (Hilbert, pag. 24)

Nella presentazione di Prodi invece non si incontra esplicitamente una proposizione sull'uguaglianza tra angoli retti, tuttavia essa è deducibile dal fatto che si dimostra che:

"Una qualunque isometria trasforma due rette r e s fra loro ortogonali in rette r' e s' fra loro ortogonali." (Prodi, Bastianoni, pag. 71)

e inoltre dal fatto che se due angoli sono retti allora esiste almeno una isometria che trasforma uno nell'altro, e dunque sono congruenti.

5.c La definizione di rette parallele.

Analizziamo ora brevemente come i tre matematici definiscono il concetto di "rette parallele", tralasciando poi come ne dimostrano l'esistenza. Euclide nell'ultima definizione del primo libro degli "Elementi", esprime la relazione di parallelismo in questo modo:

XXIII. Parallele sono quelle rette che, essendo nello stesso piano e venendo prolungate illimitatamente dall'una e dall'altra parte, non si incontrano fra loro da nessuna delle due parti.

Euclide definisce quindi la relazione di parallelismo in senso stretto, cioè come relazione "antiriflessiva" (nessuna retta è parallela a se stessa) e "simmetrica". La proprietà di "transitività", nell'ipotesi che le rette siano distinte, è dimostrata da Euclide nella proposizione 30 e basandosi sul quinto postulato.

Hilbert, similmente ad Euclide, definisce il concetto di rette parallele, prima di introdurre l'assioma dell'unicità della parallela, in questo modo:

"Spiegazione.- Chiamiamo parallele due rette se stanno in un piano e non si intersecano" (Hilbert, pag. 29)

Quindi la relazione di parallelismo, anche secondo Hilbert non è una relazione di equivalenza, non essendo riflessiva perchè una retta non è parallela a se stessa.

Prodi definisce il concetto di rette parallele in questo modo:

"Due rette si dicono **incidenti** se hanno esattamente un punto in comune; altrimenti si dicono **parallele**" (Prodi, Bastianoni, pag. 19)

Quindi se due rette sono coincidenti oppure non hanno punti in comune sono parallele e dunque la relazione di parallelismo in questo caso risulta riflessiva, cioè ogni retta è parallela a se stessa. La proprietà riflessiva e la proprietà simmetrica sono facilmente deducibili dalla definizione, mentre la proprietà di transitività si deduce dall'unicità della parallela, come è facile verificare (lo si può fare come esercizio). In questo contesto la relazione di parallelismo è dunque di equivalenza (riflessiva, simmetrica e transitiva) e le classi di equivalenza non sono altro che le direzioni.

5.d La congruenza (o uguaglianza) fra figure

Esaminiamo ora come nelle tre trattazioni viene affrontato l'argomento della congruenza tra figure, in particolare fra triangoli.

Al di là di come Euclide, Hilbert e Prodi dimostrano i tre criteri di congruenza fra triangoli, argomento che qui non sarà approfondito, sembra interessante evidenziare come sia da loro interpretato il concetto di figure uguali o congruenti.

Nelle dimostrazioni di Euclide del primo e del terzo criterio di congruenza fra triangoli si fa uso del movimento inteso nel senso meccanico ed intuitivo. Ma questo movimento non ha negli Elementi alcuna precisazione teorica. È da notare che il concetto di uguaglianza di due poligoni non è come la intendiamo oggi perché spesso può essere associato al nostro concetto di equivalenza cioè per Euclide due poligoni sono uguali se hanno estensione o area uguale. In alcuni punti della sua trattazione, tuttavia, si parla di triangoli uguali nella nostra interpretazione, come ad esempio nella Proposizione 4 (il primo criterio di congruenza fra triangoli), come fanno notare Frajese-Maccioni:

"Noi (attualmente) enunciamo il primo criterio nel modo seguente: Se due triangoli hanno due lati e l'angolo tra essi compreso rispettivamente uguali, essi sono uguali. Infatti con l'affermazione che i due triangoli sono uguali, intendiamo che essi sono uguali in senso stretto, cioè che hanno tutti i loro elementi (lati ed angoli) ordinatamente uguali, e non già che siano di estensione uguale, cioè che siano equivalenti. Ma siccome il termine uguale, applicato ai poligoni, ha per Euclide il nostro significato di equivalente, l'enunciato della proposizione 4 non può limitarsi alla tesi che i due triangoli sono uguali" (Frajese-Maccioni, pag. 82)

Hilbert definisce in questo modo il concetto di congruenza tra triangoli:

"Spiegazione – Un triangolo ABC si dice congruente ad un triangolo A'B'C' se sono soddisfatte tutte le congruenze:

$$AB \equiv A'B',$$
 $AC \equiv A'C',$ $BC \equiv B'C'$ $< A \equiv < A',$ $< B \equiv < B',$ $< C \equiv < C'.$ "

(Hilbert, pag. 16)

Hilbert dimostra il primo e il secondo criterio di congruenza partendo dal quarto e quinto assioma di congruenza, quindi pone gran parte del primo criterio di congruenza tra triangoli come un assioma, evitando, come fa Euclide, di incorrere in una dimostrazione che non si fonda su alcuna proposizione

primitiva o alcun teorema precedentemente dimostrato. Anziché usare il movimento meccanico, Hilbert utilizza il trasporto degli angoli e dei segmenti, ampiamente teorizzati nella sua trattazione.

È interessante precisare cosa intende Hilbert per figura e in generale cosa intende per figure congruenti. Dopo gli assiomi di congruenza viene infatti precisato quanto segue (Hilbert, pag. 28):

"Spiegazione. – Un qualsiasi numero finito di punti si chiama una figura; se tutti i punti stanno in un piano, essa si chiama una figura piana.

Due figure si dicono congruenti se i loro punti possono venire accoppiati in modo che tutti i segmenti e gli angoli così associati siano tra loro congruenti"

È chiaro che l'interesse di Hilbert, in questo contesto, è di esaminare figure poligonali, individuate da un insieme finito di vertici (una circonferenza, ad esempio, non risulta dunque una figura, come neppure un segmento o una retta o un semipiano lo sono...)

Vediamo invece come nella trattazione di Prodi si procede diversamente. Notiamo anzitutto che la definizione di figura cui si fa riferimento è quella di un qualsiasi sottoinsieme di punti del piano (sia esso finito o infinito). Nel caso dei triangoli si definisce la congruenza in questo modo:

"Due triangoli ABC e A'B'C' sono tra loro congruenti se esiste un isometria che porti A in A', B in B', C in C'."

Prodi dimostra i tre criteri di congruenza tra triangoli attraverso le proprietà delle isometrie e questi importanti teoremi:

"Vi è al più una isometria che manda due punti A, B di una retta R in due punti A', B' (rispettivamente) di una retta \Re' e che manda uno dei due semipiani con bordo \Re in un fissato semipiano con bordo \Re' "

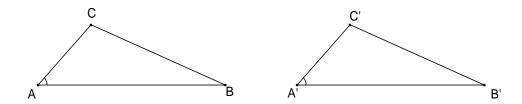
"Due angoli (\Re , \Im) ed (\Re ', \Im ') hanno la stessa misura se e solo se esiste un'isometria che trasforma l'uno nell'altro (cioè se sono isometrici)"

A titolo di esempio vediamo in sintesi la dimostrazione del primo criterio di congruenza fra triangoli (Prodi, Bastianoni, pag. 177):

Due triangoli ABC e A'B'C' siano tali che <(BAC) = <(B'A'C'), AB = A'B', AC = AC'. Allora essi sono congruenti.

Poiché i due angoli BAC e B'A'C' hanno uguale ampiezza, esiste un 'isometria che trasforma il primo angolo nel secondo. Possiamo supporre, inoltre, che questa isometria trasformi la

semiretta AB nella semiretta A'B' e la semiretta AC nella semiretta A'C'. Poiché AB = A'B', questa isometria trasforma il punto B nel punto B'; analogamente, essendo AC = A'C', l'isometria trasforma il punto C nel punto C'. Così abbiamo trovato un'isometria che trasforma i vertici A,B,C, ordinatamente, nei vertici A'B'C' ed è quello che volevamo dimostrare.



Più in generale, una figura F si dice congruente o uguale ad una figura F' se esiste un'isometria g che trasformi F in F', cioè tale che g(F) = F'.

È evidente l'utilizzo cruciale, in questa teoria, del concetto di isometria, che a sua volta si fonda sul concetto più generale di funzione, con dominio e codominio l'insieme dei punti del piano (in modo analogo si procede nello spazio, dove la definizione appena vista è ancora valida).

6. Isometrie e figure geometriche nel piano

In questa parte si vogliono presentare le altre isometrie piane che, insieme alla simmetria assiale, completano il quadro delle trasformazioni del piano in sé e che ci saranno utili per caratterizzare alcune figure piane già familiari (come ad esempio i poligoni regolari) ed altre meno note, come ad esempio i fregi. In questo procedimento si proporrà un continuo confronto tra un'impostazione centrata sul concetto di isometria, come quella di Prodi e un'impostazione più classica come quella di Hilbert.

A questo scopo riprendiamo anzitutto la definizione di simmetria di asse r:

Definizione 1: Data nel piano una retta, si dice **simmetria assiale** (o **ribaltamento**) **di asse r** un'isometria che

- Lascia fissi tutti punti dell'asse r e porta ciascuno dei due semipiani generati da r nell'altro;
- È involutoria (cioè: applicata due volte ci dà l'identità).

Questa è la definizione che abbiamo già incontrato nell'ambito dell'assiomatica di Prodi: ciò che è interessante notare è che anche in una impostazione assiomatica diversa (ad esempio quella di Hilbert) è ovviamente possibile arrivare a definire la simmetria di asse r, ad esempio in questo modo:

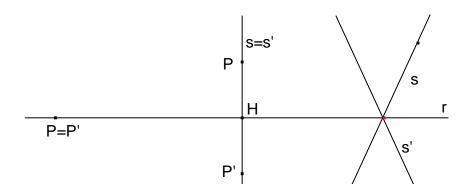
Definizione 2: Data nel piano una retta r, si dice simmetria assiale (o ribaltamento) di asse r un'isometria costruita in questo modo:

- se P appartiene ad r allora il simmetrico P' di P è ancora P
- se P non appartiene ad r allora il simmetrico P' di P si trova sulla perpendicolare per P ad r, nel semipiano opposto a quello di P e tale che PH = P'H (detto H il punto di intersezione tra r e la perpendicolare per P ad r).

Al di là del quadro teorico di riferimento è comunque interessante esplorare le proprietà di questa trasformazione piana e chiedersi, ad esempio, quali siano i suoi elementi fissi (o uniti), cioè ad esempio i punti o le rette del piano che vengono trasformati in sé nella simmetria.

È semplice constatare che tutti e soli i punti di r sono uniti nella simmetria di asse r: ogni punto P che non appartenga ad r ha invece come immagine un punto P' del semipiano opposto, e dunque certamente diverso da P.

Per quanto riguarda le rette si può dire che tutte e sole le perpendicolari ad r sono unite nella simmetria di asse r: è da notare però che la retta è trasformata in sé ma i suoi punti non sono uniti, tranne ovviamente l'unico punto di questa perpendicolare che è in r, cioè l'intersezione H tra r e s: si può dire che le semirette di origine H si scambiano tra loro.



A seguito dell'analisi già sviluppata sul concetto di perpendicolarità fra rette si può aggiungere qui come il concetto di **asse di un segmento** possa essere dato nei seguenti modi differenti, ovviamente fra loro equivalenti⁵:

Definizione 1: Si dice asse del segmento AB l'asse dell'unica simmetria che scambia A con B.

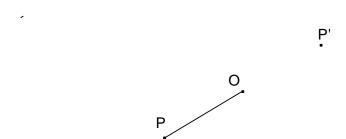
Definizione 2: Si dice **asse del segmento AB** la perpendicolare ad AB per il punto medio di AB.

Definizione 3: si dice **asse del segmento AB** il luogo dei punti del piano equidistanti dagli estremi A e B del segmento stesso.

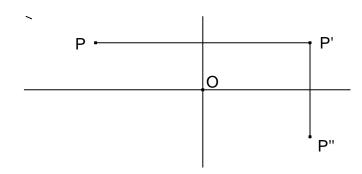
Un'ulteriore isometria che è interessante esplorare è la simmetria centrale di centro un punto O del piano e che può essere definita nel modo seguente:

Si dice **simmetria di centro O** l'applicazione del piano in sé costruita così:

- il punto O è unito;
- se P è un punto diverso da O, allora si traccia la retta OP e sulla semiretta di origine O e non contenente P si considera il punto P' tale che OP=OP'.

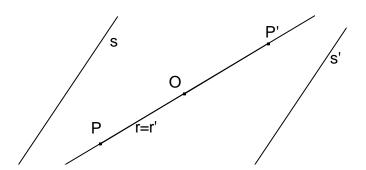


Si può dimostrare che si tratta di un'isometria e che si può anche ottenere (e quindi essere anche definita) come prodotto (cioè applicazione successiva) di due simmetrie assiali con assi fra loro perpendicolari e incidenti in O (verificarlo per alcuni punti, così da interpretare graficamente la proposizione enunciata).



⁵ Per approfondimenti sulla dimostrazione dell'equivalenza tra le tre definizioni si può vedere il testo "Geometria del piano", pagg. 58-60.

Quanto agli elementi uniti nella simmetria centrale di centro O, è facile constatare che l'unico punto unito è il punto O stesso; le rette unite (non però di punti uniti!) sono tutte e sole le rette passanti per O. Se una retta s non passa per O, la sua immagine s' risulta parallela ad s.



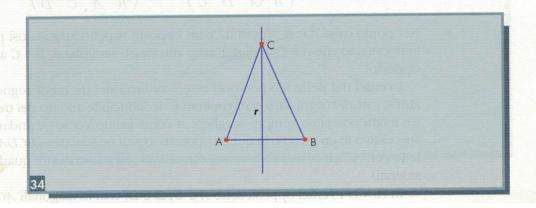
Siamo in grado, a questo punto, di esplorare le simmetrie (assiali o centrali) di alcune figure familiari, come i triangoli e i quadrilateri, procedendo come indicato qui di seguito (da "Geometria del piano", pagg. 75-81).

Ora passiamo in rassegna alcune semplici figure che hanno un *asse di simmetria* (cioè che sono trasformate in sé da una simmetria assiale) oppure un *centro di simmetria* (cioè che sono trasformate in sé da una simmetria centrale). Considereremo i triangoli e i quadrangoli.

Vediamo come deve essere una terna di punti A, B, C per essere trasformata in sé da una simmetria assiale di asse \boldsymbol{r} . La simmetria genera una *sostituzione* nell'insieme dei vertici $\{A, B, C\}$.

Un primo caso è quello in cui ogni vertice corrisponde a se stesso; ma allora tutti i vertici si trovano sulla retta \boldsymbol{r} . In questo caso i tre vertici non individuano un triangolo essendo allineati (potremo parlare di triangolo *degenere*).

In caso contrario esiste almeno un vertice che non corrisponde a se stesso: data la simmetria della figura avrà come corrispondente un altro dei tre vertici. Supponiamo che sia $A \to B$; allora deve essere $B \to A$, e il punto C, che resta solo, deve corrispondere a se stesso, e quindi deve trovarsi su \boldsymbol{r} .



Nel primo caso lo schema della sostituzione è:

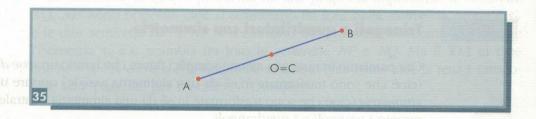
$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix}$$

nel secondo è:

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix}$$

Un triangolo con almeno un asse di simmetria si dice isoscele.

Un triangolo non può invece avere un centro di simmetria. Infatti, ragionando formalmente come nel caso precedente e arrivando al medesimo schema, si trova che il punto C, essendo punto fisso, deve coincidere con il centro di simmetria O (infatti abbiamo visto che in una simmetria centrale l'unico punto fisso è il centro). Ma allora i punti A, B, C sarebbero allineati. (Si potrebbe parlare anche in questo caso di triangolo *degenere*).



Consideriamo ora una quaterna di punti A, B, C, D che venga trasformata in sé da una simmetria di asse \boldsymbol{r} ; supponiamo dapprima che tutti i vertici siano trasformati in sé: allora essi sono tutti sull'asse perciò sono allineati e possono individuare solo quadrangoli degeneri. Escluso questo caso, vi sarà almeno una coppia di vertici che si scambiano fra loro $A \rightarrow B, B \rightarrow A$.

Allora sono possibili due casi: che i punti dell'altra coppia si scambino fra loro, oppure che siano entrambi fissi.

Gli schemi possibili sono i seguenti:

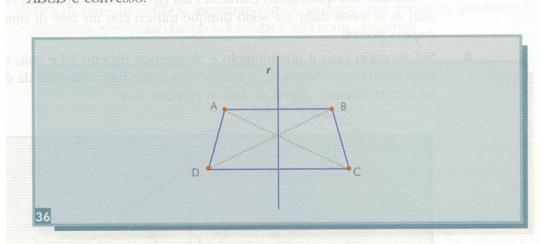
(a)
$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix}$$
 (b) $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & C & D \end{pmatrix}$

Nel primo caso A e B stanno da parti opposte rispetto ad r e così pure C e D. Supponiamo che A e D appartengano allo stesso semipiano, B e C al semipiano opposto.

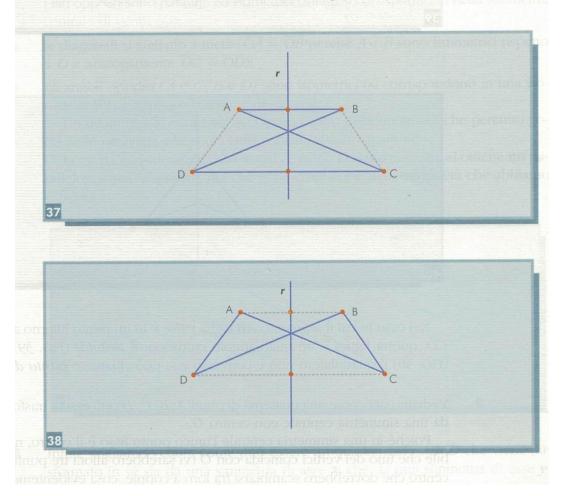
I vertici del poligono possono essere ordinati nei tre modi seguenti: *ABCD*, *ABDC*, *ACBD* (ogni altro ordinamento è riconducibile ad uno dei tre considerati); infatti possiamo sempre scegliere *A* come primo vertice e andare al vertice successivo in un verso o in quello opposto: così il quadrilatero *BCDA* può essere letto con *ADCB* o, nell'altro verso, con *ABCD* che è uno dei tre quadrilateri considerati).

In ABCD i vertici opposti sono A e C, B e D; così le diagonali AC e BD, che

congiungono vertici appartenenti a semipiani opposti, incontrano la retta r. Ma i segmenti AC e BD si corrispondono nella simmetria di asse r, perciò incontrano r in uno stesso punto interno ad entrambi. Si può concludere che il quadrilatero ABCD è convesso.



Gli altri due quadrilateri *ABDC* e *ACBD* non sono convessi, sono anzi *intrecciati*: si incontrano sull'asse i lati e non le diagonali.

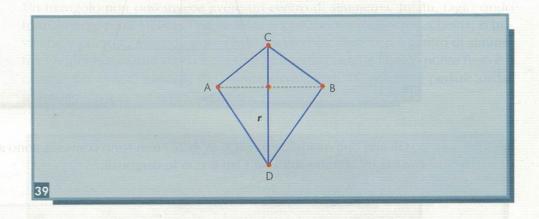


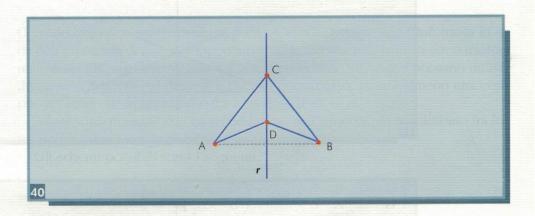
Dunque l'unico quadrilatero convesso è ABCD.

Considerazioni analoghe valgono anche nel caso in cui C sia, rispetto a r, dalla parte di A e D dalla parte di B.

Nel caso dei quadrilateri convessi i lati AB e CD sono paralleli (sono trasformati in se stessi dalla s_r): sono dunque trapezi con un asse di simmetria, detti trapezi isosceli.

Nel secondo caso il quadrangolo è simmetrico rispetto ad r solo se AB e CD sono scelti come diagonali: si ottiene allora una figura formata da due triangoli fra loro simmetrici, aventi un lato in comune su r.



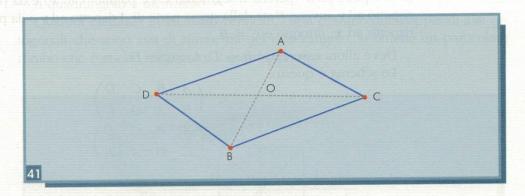


Nel caso in cui il segmento AB taglia l'asse \mathbf{r} in un punto interno al segmento CD, questa figura è un quadrangolo convesso: il deltoide (FIG. 39), altrimenti (FIG. 40) il quadrilatero non è convesso e si può chiamare punta di freccia.

3 Vediamo ora come una quaterna di punti A, B, C, D può essere trasformata in sé da una simmetria centrale con centro O.

Poiché in una simmetria centrale l'unico punto fisso è il centro, non è possibile che uno dei vertici coincida con *O* (vi sarebbero allora tre punti diversi dal centro che dovrebbero scambiarsi fra loro a coppie, cosa evidentemente impossibile).

Rimane allora un'unica possibilità: che vi siano due coppie A, B e C, D di punti simmetrici rispetto ad O. Possiamo supporre dapprima che A, B e C, D non siano allineati. È facile verificare che AC e BD sono paralleli (infatti una simmetria centrale trasforma una retta in una retta parallela): così pure AD e BC, mentre AB e CD si incontrano in O. Dunque, per avere un quadrangolo convesso, non resta che prendere AB e CD come diagonali.

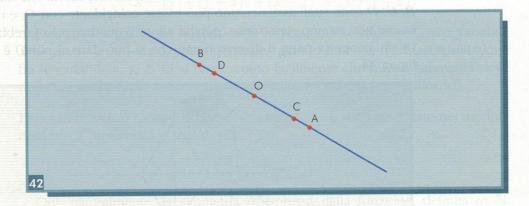


Per il quadrangolo convesso ACBD valgono le seguenti proprietà:0

- i lati opposti sono paralleli ed isometrici (infatti si corrispondono nella simmetria centrale di centro O);
- le diagonali si tagliano a metà $(\overline{OA} = \overline{OB})$ perché $A \in B$ sono simmetrici rispetto a O e analogamente $\overline{OC} = \overline{OD})$;
- gli angoli opposti (A e C, B e D) sono isometrici (si corrispondono in una isometria, che è appunto la simmetria centrale).

Un quadrangolo convesso avente un centro di simmetria (e che pertanto gode delle proprietà ora enunciate) si dice *parallelogrammo*.

Resta da considerare il caso in cui *A*, *B*, *C*, *D* siano allineati: si ottiene un parallelogrammo *degenere*, ma che gode comunque delle proprietà che abbiamo esposto.



Infine vogliamo vedere come può essere un quadrangolo ABCD che viene trasformato in sé sia da una simmetria di asse x che da una simmetria di asse y, dove x e y sono ortogonali fra loro.

Sia O il punto di incontro degli assi; indichiamo con s_x la simmetria di asse x, con s_y la simmetria di asse y. La discussione può essere fatta in astratto (tenendo conto che s_x , s_y sono involutorie e che si ha $s_x \circ s_y = s_y \circ s_x$), ma è piú semplice cercare di leggere direttamente la soluzione dalla figura.

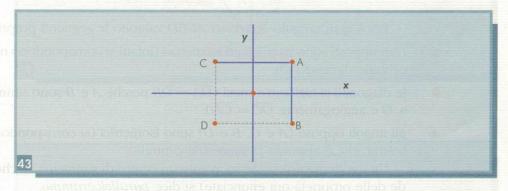
Un primo caso è quello in cui vi sia un vertice A che non appartiene ad alcuno degli assi. Sia $s_x: A \to B$ e $s_y: A \to C$. Notiamo che C sta dalla stessa parte di A rispetto ad x (perché il segmento CA è parallelo ad x) e da parte opposta rispetto ad y, invece B sta dalla stessa parte di A rispetto ad y e da parte opposta rispetto ad x; dunque è $C \neq B$.

Deve allora essere $s_y: B \to D, s_x: C \to D$

Lo schema è questo:

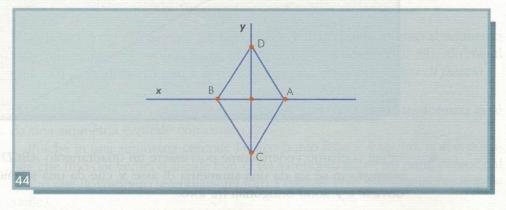
$$s_x : \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix}$$
$$s_y : \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{pmatrix}$$

Il quadrangolo è un rettangolo.



Notiamo che se, come abbiamo supposto, un vertice non appartiene ad alcuno degli assi, tutti e quattro i vertici sono fuori degli assi.

Il secondo caso (l'unico che resta da considerare) è quello in cui almeno un vertice appartiene a un asse: si riconosce facilmente, allora, che tutti i vertici A, B, C, D sono sugli assi; nessuno può essere coincidente con O, e non possono essere tutti su uno stesso asse, perché allora il quadrangolo sarebbe degenere. La situazione (a parte il diverso nome che si può dare ai punti) è quella della figura 44.

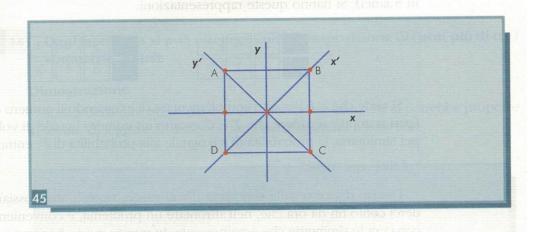


Lo schema è:

$$s_{x}:\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & B & D & C \end{pmatrix}$$
$$s_{y}:\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix}$$

Il quadrangolo è un rombo.

Qualora entrambi i casi siano verificati, ossia esistano due coppie di assi ortogonali che sono assi di simmetria del quadrangolo, si ottiene un particolare rombo che è anche rettangolo: il *quadrato*.



Sulla base delle esplorazioni sviluppate si possono formulare le seguenti definizioni differenti (ma fra loro equivalenti) dei triangoli e quadrilateri più familiari.

Per il TRIANGOLO ISOSCELE si può dire:

- il **triangolo isoscele** è il triangolo con due lati uguali OPPURE
- il **triangolo isoscele** è il triangolo con un asse di simmetria

Per il TRIANGOLO EQUILATERO:

- il triangolo equilatero è il triangolo con tre assi di simmetria OPPURE
- il **triangolo equilatero** è il triangolo con tutti e tre i lati uguali

Per il RETTANGOLO:

- il **rettangolo** è il quadrilatero con due assi di simmetria, fra loro perpendicolari e non passanti per i vertici OPPURE

- il **rettangolo** è il quadrilatero con quattro angoli retti

Per il ROMBO:

- il **rombo** è il quadrilatero con due assi di simmetria, fra loro perpendicolari e passanti per i vertici OPPURE
- il **rombo** è il quadrilatero con i quattro lati uguali

Per il QUADRATO:

- il **quadrato** è il quadrilatero con quattro assi di simmetria, cioè due coppie di assi perpendicolari di simmetria (cioè è rettangolo e rombo insieme) OPPURE
- il **quadrato** è il quadrilatero con i lati uguali e gli angoli uguali (cioè retti)

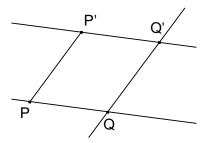
Per il PARALLELOGRAMMO:

- il parallelogrammo è un quadrilatero convesso con un centro di simmetria OPPURE
- il **parallelogrammo** è un quadrilatero con i lati opposti paralleli.

La TRASLAZIONE e la ROTAZIONE

Un'isometria che non abbiamo ancora definito ma che traduce l'idea del movimento di "slittamento" sul piano in una certa direzione è la traslazione, che può essere definita nel modo seguente:

Si dice **traslazione** un'applicazione biunivoca del piano in sé tale che i punti del piano o sono tutti fissi o si spostano tutti in una stessa direzione, nello stesso verso e di un tratto di uguale lunghezza (cioè di uno stesso "vettore").

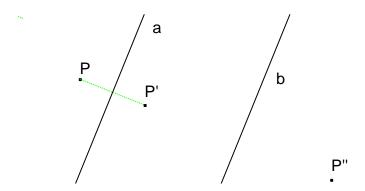


In base alla definizione si deduce che anche l'identità, cioè l'applicazione che lascia fermi tutti i punti del piano, è da considerarsi una traslazione (la traslazione nulla).

Risulta evidente che una traslazione t è individuata da una coppia qualsiasi di punti corrispondenti nella traslazione stessa e inoltre se una traslazione t manda P in P' e Q in Q' allora il quadrilatero PP'Q'Q (in questo ordine!) è un parallelogrammo.

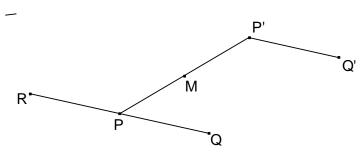
È anche chiaro che se una traslazione è diversa dall'identità allora non ha punti uniti; quanto alle rette, risulta che una retta r viene trasformata in una retta r' parallela ad r ed è quindi evidente che se r ha la stessa direzione della traslazione allora r è unita (ma nessun suo punto è unito!). Esplorare la validità di queste proposizioni attraverso opportuni esempi grafici.

Un risultato interessante riguarda il legame di una traslazione con le simmetrie assiali: ogni traslazione può essere ottenuta come prodotto (cioè applicazione successiva) di due simmetrie assiali ad assi paralleli:



In riferimento alla figura, è facile constatare che se si applica la simmetria di asse a e poi la simmetria di asse b, si ottiene una traslazione che ha direzione perpendicolare agli assi a e b, con verso che va da a b e con ampiezza pari al doppio della distanza tra gli assi a e b (verificarlo graficamente su alcuni altri punti).

Un altro risultato interessante che riguarda ancora le traslazioni è che si possono ottenere anche con le simmetrie centrali: si ha che il prodotto di due simmetrie centrali è una traslazione (esplorare questo risultato attraverso esempi grafici). Viceversa, una traslazione che manda P in P' può essere ottenuta come prodotto di due simmetrie centrali, ad esempio quella di centro P e quella di centro il punto medio di PP' (anche in questo caso è interessante esplorare questo risultato attraverso esempi grafici).



In conclusione una traslazione si può ottenere (e può essere definita) sia come prodotto di due simmetrie assiali ad assi paralleli sia come prodotto di due simmetrie centrali.

C'è un altro tipo di isometrie che merita di essere analizzato, quello delle **rotazioni**: la nostra esperienza quotidiana ci fornisce numerosi esempi di moti rotatori, come quello della ruota (che qui ci conviene pensare disegnata su un piano) o quello delle lancette di un orologio non digitale.

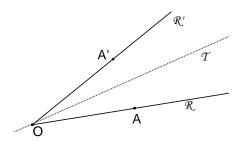
Vediamo ora come si definisce la rotazione di centro un punto qualsiasi O del piano.

Dato un punto O del piano si dice **rotazione di centro O** un'isometria che o lascia fissi tutti i punti o lascia fisso il solo punto O.

Anche in questo caso la definizione è formulata in modo da comprendere tra le rotazioni anche l'identità, cioè l'applicazione che lascia fisso ogni punto del piano (rotazione nulla).

Un'ulteriore analogia tra traslazione e rotazione è data dal fatto che anche una rotazione può essere ottenuta come composizione di due simmetrie assiali incidenti nel centro di rotazione, più precisamente:

se consideriamo la rotazione di centro O che trasforma un punto A nel punto A', essa si può ottenere componendo la simmetria di asse la retta OA con la simmetria avente per asse la bisettrice dell'angolo AOA' (oppure componendo la simmetria di asse la stessa bisettrice e poi la simmetria di asse la retta OA').



Quanto agli elementi uniti in una rotazione non nulla di centro O, possiamo dire che, tra i punti, il solo punto fisso è O stesso, in base alla definizione; è facile poi constatare che non ci sono rette unite in una generica rotazione, tuttavia se consideriamo il prodotto di due simmetrie assiali ad assi fra loro perpendicolari (ed è il caso, già esaminato, della simmetria centrale!) allora sono unite, come si è già precisato, tutte le rette per il centro di rotazione.

In riferimento alle rotazioni è interessante esaminare come sia possibile definire un poligono regolare. Richiamiamo anzitutto la definizione più familiare di poligono regolare di n lati:

Definizione 1: Un poligono si dice **regolare** se ha i lati di uguale lunghezza e gli angoli di uguale ampiezza.

Con l'ausilio della rotazione possiamo anche dire:

Definizione 2: Un poligono si dice **regolare** se esiste una rotazione che manda ciascun vertice nel successivo.

Si tratta di due definizioni fra loro equivalenti, anche se la dimostrazione della loro equivalenza non è immediata (si può vedere il testo "Geometria del piano", pag. 226 e pag. 246)

Esercizio: In base alle rispettive definizioni, studiare (quante e quali sono?) le isometrie di:

- un triangolo isoscele
- un triangolo equilatero
- un rettangolo
- un rombo
- un quadrato
- un parallelogrammo
- un poligono regolare di n lati (conviene distinguere n pari da n dispari, per una più facile descrizione delle rispettive isometrie)

In ognuno dei casi da studiare è utile compilare una tabella con le isometrie delle rispettive figure, sia in orizzontale che in verticale, collocando nei vari incroci l'isometria prodotto: si potranno osservare interessanti regolarità e trovare conferme ad alcuni elementi della teoria presentata.

Per concludere questa parte sulle isometrie del piano è interessante osservare che una isometria piana risulta determinata in modo unico se si conoscono le immagini di due punti A e B del piano e l'immagine di uno dei due semipiani individuati dalla retta AB. Inoltre ogni isometria può essere ottenuta con il prodotto, al massimo, di tre simmetrie assiali.

Più precisamente, dati due punti A, B di una retta \mathcal{R} e due punti A', B' di una retta \mathcal{R} ' con AB = A'B' e fissato un semipiano ε_1 con bordo \mathcal{R} e un semipiano ε_1 con bordo \mathcal{R} ', esiste ed è unica l'isometria f che manda A in A', B in B' e trasforma ε_1 in ε_1 '. Questa isometria si può ottenere componendo non più di tre simmetrie assiali.

La costruzione di tale isometria può essere espressa graficamente mediante l'utilizzo di una bandierina; l'asta ha il piede in A e il drappo in B. Il drappo indica il semipiano prescelto. Si tratta di far vedere che, date due bandierine con l'asta di ugual lunghezza, si può portare la prima a sovrapporsi alla seconda attraverso una successione di simmetrie assiali (non più di tre). Indichiamo con $(A,B,\,\epsilon_1)$ la prima bandierina e con $(A',B',\,\epsilon_1^{'})$ la seconda bandierina.

La costruzione può svilupparsi in tre mosse:

 $\underline{1}^{a}$ mossa: se A \neq A' eseguiamo la simmetria assiale che scambia tra loro A ed A'; l'asse sarà la retta S che è asse del segmento [A, A']. Il punto B va a finire in un certo punto B''.

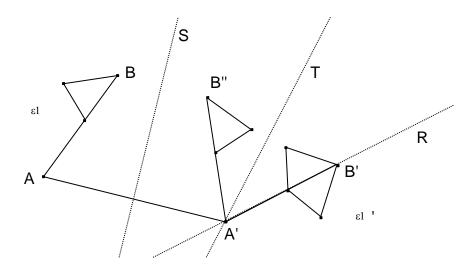
Se A = A' questa mossa viene saltata.

 $\underline{2}^{a}$ mossa: se le semirette A'B' ed A'B'' non coincidono si fa una simmetria che porta la semiretta A'B'' a coincidere con la semiretta A'B' (rispetto alla bisettrice \mathcal{T} dell'angolo che individuano).

Se le aste coincidono già questa mossa viene saltata.

 3^{a} mossa: ormai le aste delle bandierine coincidono , ma può darsi che i drappi delle bandierine siano opposti. Basta allora applicare una simmetria avente come asse la retta A'B' per fare sovrapporre anche i drappi delle bandierine .

In conclusione, eseguendo la composizione $f = S_{\mathscr{R}'} \cdot S_{\mathscr{T}} \cdot S_{\mathscr{S}}$ abbiamo trasformato la bandierina (A,B, ε_1) nella bandierina (A',B', ε_1 '). Pertanto f, che è un'isometria essendo composta di isometrie, manda A in A', B in B' e il semipiano ε_1 nel semipiano ε_1 . La figura illustra la successione dei passi da compiere.



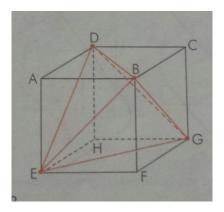
La proposizione esaminata ci dice che per avere a disposizione tutte quelle isometrie che la nostra intuizione ci suggerisce ci è sufficiente avere a disposizione le simmetrie assiali e le tipologie possibili di isometrie piane, oltre alle simmetrie assiali, sono solo quelle che si ottengono componendo due o tre simmetrie assiali.

7. Esploriamo lo spazio

L'obiettivo di questa breve parte è quello di partire da osservazioni su modelli disegnati oppure costruiti con materiale opportuno per ritrovare e precisare il significato di alcuni termini geometrici già noti dalla scuola secondaria e di alcune proprietà più o meno familiari. (Si è fatto riferimento al testo "Geometria dello spazio e oltre" di G. Prodi, M.A. Mariotti, A. Bastianoni, Ghisetti&Corvi, 2009, pagg. 10-11, pag. 130 e pagg. 137-138)

Cominciamo l'esplorazione di una figura ben nota: il cubo.

Riferiamoci all'immagine e consideriamo il solido che ha come vertici i punti B, D, E, G (una quaterna di vertici del cubo due a due non appartenenti a uno stesso spigolo e scelti in posizione "strategica"):



Il solido di vertici B, D, E, G ha 4 vertici, 6 spigoli (uno per ogni faccia del cubo), 4 facce: come sono gli spigoli? E le facce?

A quale categoria di solidi appartiene quello trovato? Limitiamoci a ricordare le figure solide più familiari: cubi, prismi, piramidi, forse anche tronchi di piramidi e poi coni, cilindri, sfere. È immediata una distinzione: i primi sono limitati da poligoni, gli altri da superfici in cui non compaiono poligoni, diciamo da superfici *rotonde*.

I solidi del primo tipo, cioè limitati da poligoni, sono detti **poliedri**. L'insieme dei poligoni che limitano il poliedro viene comunemente detta **superficie** del poliedro stesso. I poligoni e i loro lati vengono detti rispettivamente **facce** e **spigoli** del poliedro.

Il solido BDEG ottenuto precedentemente è detto **tetraedro**. I tetraedri sono particolari piramidi a base triangolare; il tetraedro che abbiamo costruito dal cubo ha molte particolarità: le facce sono

poligoni regolari uguali fra loro e in ogni vertice concorre lo stesso numero di spigoli. Un poliedro⁶ con queste particolarità è detto poliedro regolare.

Anche il cubo è un poliedro regolare. Tenuto conto che ha sei facce è detto anche esaedro regolare, in analogia con il caso del tetraedro.

Quanti tipi di poliedri regolari esistono?

Su un piano sappiamo che esistono infiniti tipi di poligoni regolari (perché la circonferenza può essere suddivisa in n archi uguali, qualsiasi sia n): per n=3 abbiamo i triangoli equilateri, per n=4 i quadrati, per n=5 i pentagoni regolari, ecc.

Il concetto di poliedro regolare, nello spazio, si può pensare come generalizzazione del concetto di poligono regolare nel piano; tuttavia vedremo che non troviamo la stessa analogia nei tipi possibili di poliedri regolari. La ricerca dei possibili poliedri regolari, oltre a quelli già visti, cioè il tetraedro e il cubo, può essere condotta sia attraverso la costruzione dei possibili modelli sia per via teorica, in entrambi i casi sulla base di considerazioni elementari che qui sviluppiamo.

Osserviamo anzitutto i due seguenti fatti:

consecutive si dicono facce dell'angoloide.

- se V è un vertice di un poliedro, in V concorrono almeno 3 spigoli;
- in ogni poliedro convesso, se V è il vertice di un angoloide⁷, la somma delle ampiezze delle facce che concorrono in V è <360°

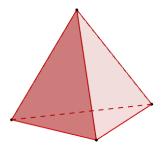
Poiché stiamo cercando poliedri regolari, le loro facce devono essere poligoni regolari, dunque triangoli equilateri o quadrati o pentagoni, ecc.

Cominciamo dunque ad esaminare i possibili poliedri regolari costituiti da triangoli equilateri: poiché l'angolo interno di un triangolo equilatero è di 60° e tre è il numero minimo di spigoli concorrenti in un vertice (e dunque di facce in un vertice) avremo 3x60°= 180°, che soddisfa la condizione di essere

⁶ In questo contesto ci riferiamo sempre a poliedri convessi (cioè senza "buchi" né "rientranze"... in termini più corretti: se P è un poliedro, P è convesso se e solo se per ogni coppia di punti A, B di P si ha che tutto il

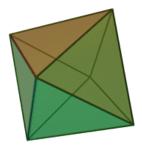
angoloide: qui ci si riferisce ad angoloidi convessi, cioè tali che ogni coppia di semirette consecutive individua un piano che lascia tutte le altre semirette nello stesso semispazio. Le semirette si dicono spigoli dell'angoloide, la loro origine comune vertice dell'angoloide e gli angoli individuati da due semirette

segmento AB è contenuto in P.) ⁷ La figura costituita da n semirette con origine comune e tali che tre consecutive non siano complanari è detta <360°; in effetti il **tetraedro** ha proprio tre spigoli concorrenti in ogni vertice e dunque interpreta esattamente questo caso.

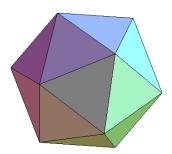


Tetraedro

Proseguendo l'analisi, se si considerano quattro spigoli concorrenti in un vertice, si ha 4x60°= 240°, ancora <360°, dunque anche questo caso è possibile; ma lo è anche il caso di cinque spigoli concorrenti in un vertice, ancora perché 5x60°=300°<360°. Gli ultimi due casi considerati sono quelli, rispettivamente, dell'**ottaedro** e dell'**icosaedro**, che interpretano dunque queste situazioni. È invece evidente che se considerassimo sei spigoli uscenti da uno stesso vertice, avremmo 6x60°=360°, che contraddice la seconda condizione (non avremmo il formarsi di alcun poliedro), dunque l'analisi dei possibili poliedri regolari con triangoli equilateri è conclusa.

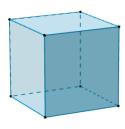






Icosaedro

Esaminiamo ora, come possibili facce, **i quadrati**: il solo caso possibile è quello già visto del cubo, perché 3x90°=270°, che è <360° ma altro non è possibile, perché con quattro spigoli già si contraddice la seconda proprietà necessaria.



Cubo

Proseguendo con i pentagoni regolari, ricordiamo che l'angolo interno di un pentagono regolare è 108° e con tre spigoli incidenti in ogni vertice si ha 3x108°=324°, caso possibile e corrispondente al dodecaedro; altro caso non si può avere, perché 4x108° supera 360°.



Dodecaedro

Una dimostrazione più formale sull'esistenza dei possibili poliedri regolari è la seguente: osserviamo che un poliedro regolare può essere caratterizzato da due numeri {n, m}: n è il numero dei lati di ciascuna faccia ed m è il numero di spigoli che concorrono in ciascun vertice.

Ciascuno degli angoloidi corrispondente ad un vertice ha come facce angoli di ampiezza (n-2) π /n; affinché gli m spigoli uscenti dal vertice non siano complanari deve essere $(n-2)\pi m/n < 2\pi$, cioè

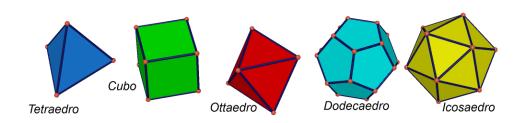
mn - 2m < 2n, che si può anche scrivere mn - 2m - 2n + 4 < 4, cioè (n - 2)(m - 2) < 4.

Si tratta allora di trovare due numeri naturali, n – 2 e m – 2 il cui prodotto sia minore di 4 e questi sono dunque solo i seguenti: 1x1, 1x2, 1x3, 2x1, 3x1, a cui corrispondono i poliedri caratterizzati da

{5, 3} il dodecaedro

$$\{3,3\}$$
 il tetraedro $\{3,4\}$ l'ottaedro $\{3,5\}$ l'icosaedro $\{4,3\}$ il cubo $\{5,3\}$ il dodecaedro

In conclusione sono possibili soltanto i cinque poliedri regolari elencati.



Ricordiamo che l'esistenza dei cinque poliedri regolari era già nota nell'antichità: per Platone (V – IV secolo a. C.), nel *Timeo*, ai primi quattro poliedri erano associati i quattro elementi fondamentali della natura, cioè rispettivamente fuoco, aria, acqua, terra, mentre al quinto veniva attribuito ufficio di ornamento dell'universo; per questo i cinque poliedri regolari sono anche noti con il nome di solidi platonici.

Euclide, nei suoi Elementi, affronta lo studio dei poliedri regolari nell'ultimo dei suoi libri, riportandone con molta accuratezza le proprietà matematiche e le rispettive costruzioni.

La formula di Eulero

Nel caso dei poligoni regolari il numero di vertici, lati e angoli risulta lo stesso: un quadrato ha 4 vertici, 4 lati e 4 angoli. Si tratta dunque di una relazione molto semplice, l'uguaglianza, che collega le loro numerosità.

Nel caso dei poliedri regolari oltre ai vertici, ai lati (spigoli) e agli angoli, occorre considerare anche le facce e il legame fra le rispettive numerosità risulta un po' più complesso.

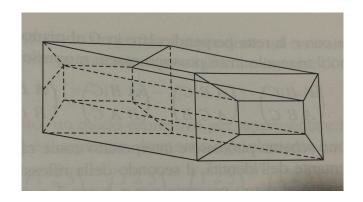
Fu Eulero (1707 – 1783) che propose la relazione esistente tra questi elementi in riferimento ai poliedri regolari ma la dimostrazione rigorosa della validità di questa relazione si ebbe attraverso un periodo piuttosto lungo, che portò a rivedere più volte alcuni fondamentali concetti, come quello di "poliedro", che qui non si ritiene opportuno affrontare in dettaglio ma che è utile sottolineare per mettere in luce quanto possa essere complicato arrivare a definire oggetti matematici in modo soddisfacente.

La relazione di Eulero tra Facce (F), Vertici (V) e Spigoli (S) di un poliedro regolare, come forse qualcuno ricorda dalla scuola secondaria e come è semplice verificare per i cinque poliedri regolari, è la seguente:

$$F + V = S + 2$$
.

È interessante notare che la stessa formula vale anche per altri poliedri, non regolari e anche per alcuni poliedri non convessi (verificare la formula in opportuni modelli).

È da osservare comunque che tale formula non è valida per tutti i solidi che si possono immaginare, come si può verificare su opportuni esempi, come nel caso del solido seguente, per il quale si verifica che la relazione di Eulero non risulta soddisfatta:



Il solido in figura è da pensare con "un buco".... non risulta quindi immediato il conteggio dei suoi elementi.

In generale si parla di **solidi euleriani** per quei solidi che verificano la relazione citata e si può dire, intuitivamente, che essi possono essere individuati se, pensati deformabili, risultano "somiglianti" a una sfera. Risulta evidente che il solido con "un buco" appena considerato non sia affatto "somigliante" ad una sfera, in effetti si è notato che non verifica la relazione di Eulero e risulta dunque esempio di un solido non euleriano.

Non è questa la sede per approfondire il tema, che è ricco di conseguenze geometriche piuttosto complesse ma per la dimostrazione della formula di Eulero e per approfondimenti sull'argomento si può consultare il testo "Geometria dello spazio e oltre" già citato, alle pagine 138 – 141.

Bibliografia

Frajese A., Maccioni L. (a cura di), Gli Elementi di Euclide, UTET, Torino, 1970

Hilbert D., Fondamenti della geometria, Feltrinelli, Milano, 1970

Prodi G., Bastianoni A., Geometria del Piano, Ghisetti e Corvi, Milano, 2003

Prodi G., Mariotti M. A., Bastianoni A., Geometria dello spazio e oltre, Ghisetti e Corvi, Milano, 2009

INDICE

1.	Introduzione	pag. 1
2.	Gli Elementi di Euclide	pag. 1
3.	Gli assiomi di Hilbert	pag. 6
4.	Gli assiomi di Prodi	pag. 11
5.	Le definizioni di angolo, angolo retto, rette perpendicolari e parallele, congruenza	pag. 14
6.	Isometrie e figure geometriche nel piano	pag. 22
7.	Esploriamo lo spazio	pag. 37