GLI ASSIOMI DELLA GEOMETRIA PIANA:
LA PROPOSTA DI G. CHOQUET

PREMESSA

Nella descrizione assiomatica della geometria elementare dovuta a G. Choquet (Choquet G., 1969, *L'insegnamento della geometria*, Feltrinelli, Milano) compaiono assiomi "semplici e forti", che gli permettono sia di sfruttare la ricchezza della nostra intuizione geometrica che di utilizzare metodi e concetti dell'analisi e dell'algebra lineare.
Ciò che segue è in linea con l'assiomatica a base metrica contenuta nell'Appendice prima del testo citato.
Questa presentazione è una rielaborazione del commento al testo di Choquet sviluppato dal prof. Mario Ferrari per il corso di Matematiche Complementari negli anni '90.

CAPITOLO I

ASSIOMI DI INCIDENZA

PREREQUISITI

I concetti prerequisiti per una buona comprensione di questa assiomatica sono di tre ordini:

- *concetti di teoria degli insiemi*: operazioni insiemistiche, funzioni, relazioni di equivalenza e di ordine, operazioni interne ecc.;
- *concetti di algebra*: gruppo, isomorfismo, ecc.;
- *concetti di analisi*: i numeri reali.

I concetti primitivi da cui Choquet parte sono quelli classici di punto, retta, piano.
Precisamente il piano, che denoteremo con Π, è un insieme i cui elementi si chiamano punti: A, B, C…; nel piano è data una famiglia *R* di sottoinsiemi particolari chiamati rette: *a*, *b*, *c*, ….

Essi ubbidiscono a vari gruppi di postulati.
Il primo gruppo, detto degli assiomi di incidenza, si compone di tre affermazioni distinte.

- La prima proposizione è di tipo esistenziale e serve per "popolare" l'insieme Π.

  <u>*Assioma 1*</u>: **Il piano contiene almeno due rette e su ogni retta ci sono infiniti punti.**

  Osservazione: La seconda parte di questo assioma può essere omessa in quanto conseguenza del successivo gruppo di assiomi sulla distanza.

- Il secondo assioma ci dice quanti punti sono necessari per caratterizzare una retta.

  <u>*Assioma 2*</u>: **Per ogni coppia di punti distinti di Π, P e Q, esiste una ed una sola retta *r* tale che: P $\in$ *r* e Q $\in$ *r*.**

- Choquet introduce subito l'assioma delle parallele postulando sia l'esistenza sia l'unicità della parallela per un punto ad una retta assegnata.
  Questo fatto gli permette una notevole economia di pensiero e l'uso di validi strumenti di indagine come la nozione di proiezione obliqua di Π su una retta *r* parallelamente ad una retta *s*.

  Definizione 1: **Diciamo che *r* è parallela ad *s* (*r//s*) se e solo se $r = s$ oppure $r \cap s = \varnothing$.**

  <u>*Assioma 3*</u>: **Per ogni retta *r* e per ogni punto P esiste una e una sola retta *s* tale che: $P \in s$ e *r//s*.**

CONSEGUENZE

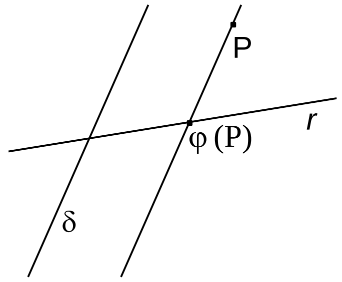
1. ***Proposizione 1***: Se $r \not\parallel s$ allora $r \cap s = P$
   In questo caso le due rette si dicono secanti.

2. ***Proposizione 2***: Nella famiglia *R* delle rette la relazione di parallelismo è una relazione di equivalenza, ovvero soddisfa le proprietà
   riflessiva (*a//a*)
   simmetrica (se $a//b \Rightarrow b//a$)
   transitiva (se $a//b$ e $b//c \Rightarrow a//c$)
   Dimostrazione
   Le prime due proprietà sono ovvie.
   La proprietà transitiva si dimostra con l'Assioma 3.

Osservazione
E' noto che ad ogni relazione di equivalenza su un insieme E è associata una partizione di E in classi di equivalenza che sono elementi di un nuovo insieme: l'insieme quoziente.
Nel nostro caso le classi di equivalenza associate al parallelismo sono chiamate *direzioni*; la classe di equivalenza alla quale appartiene la retta *r* si chiama *direzione* di *r*.

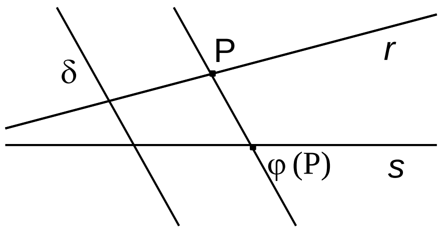
LA PROIEZIONE OBLIQUA
Sia *r* una retta e δ una direzione distinta da quella di *r*. Allora per ogni punto $P \in \Pi$ la retta di direzione δ passante per P interseca *r* in un punto $\varphi(P)$.

***Definizione 2*: L'applicazione φ di Π in *r* si dice la proiezione obliqua su *r* parallelamente a δ.**



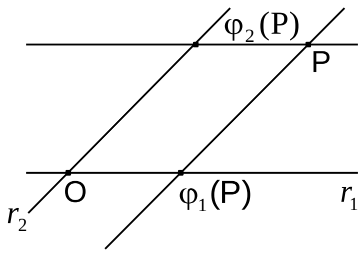
E' ovvio che:
$\varphi(\Pi) = r$
$\varphi(P) = P \quad \forall P \in r$
$\varphi(r) = r$

Sarà comodo talvolta chiamare proiezione obliqua anche la restrizione di una proiezione obliqua a una parte di Π.
L'applicazione φ non è iniettiva; è però suriettiva. Se, invece, consideriamo due rette *r* ed *s* ed una direzione δ diversa dalla direzione sia di *r* che di *s*, la proiezione obliqua $\overline{\varphi}: r \to s$ parallelamente alla direzione δ è biiettiva.



Dimostrazione
L'applicazione $\overline{\varphi}$ è biunivoca poiché, se P e Q sono due punti distinti di *r*, le rette di direzione δ passanti per detti punti sono distinte, dunque tagliano *s* in due punti distinti $\overline{\varphi}$(P) e $\overline{\varphi}$(Q).
Infine $\overline{\varphi}(r) = s$ poiché per ogni punto M di *s*, la retta di direzione δ passante per M incontra *r* in un punto N e $\overline{\varphi}(\mathrm{N}) = \mathrm{M}$.
Evidentemente la proiezione obliqua di *s* su *r* parallelamente a δ non è altro che $\overline{\varphi}^{-1}$.

SISTEMI DI ASSI
Siano r_1 e r_2 due rette secanti; indichiamo con φ_1 la proiezione obliqua su r_1 parallelamente a r_2, e con φ_2 la proiezione obliqua su r_2 parallelamente a r_1.
Per ogni $\mathrm{P} \in \Pi$ i punti $\varphi_1(\mathrm{P})$ e $\varphi_2(\mathrm{P})$ sono detti le *componenti* di P rispetto al sistema d'assi r_1, r_2; l'intersezione di r_1, r_2 si dice *origine* del sistema.



Si ha inoltre che ad ogni coppia $(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2)$ di punti di Π tali che $\mathrm{P}_1 \in r_1$ e $\mathrm{P}_2 \in r_2$ corrisponde un unico punto P di Π tale che $\varphi_1(\mathrm{P}) = \mathrm{P}_1$ e $\varphi_2(\mathrm{P}) = \mathrm{P}_2$, questo punto è l'intersezione della parallela a r_2 passante per P_1 e della parallela a r_1 per P_2.

L'applicazione $\mathrm{f}: \Pi \to r_1 \times r_2$ con $\mathrm{f(P)} = (\varphi_1(\mathrm{P}), \varphi_2(\mathrm{P}))$ è dunque una biiezione.
Si esprime questo fatto dicendo che (r_1, r_2) è un *riferimento* del piano e che ogni punto di Π è individuato dalle sue due componenti.

CAPITOLO II

ASSIOMI DI ORDINE

Il gruppo degli assiomi di ordine si compone di due affermazioni: la prima riguarda le singole rette in quanto introduce fra di esse una relazione di ordine totale; la seconda, invece, stabilisce un legame fra gli ordini delle varie rette.
Supporremo nota la relazione binaria di ordine totale su un insieme, cioè una relazione tricotomica e transitiva.

Assioma 4: **Ad ogni retta *r* sono associate due strutture di ordine totale, ciascuna opposta all'altra.**

Si indicherà questa relazione con il simbolo <.
Se A e B sono due punti di una retta *r*, secondo una relazione di ordine è A<B, secondo la relazione opposta è B<A.

Questo assioma introduce d'un sol colpo le due strutture d'ordine della retta, poiché non esiste alcuna scelta naturale d'un ordine privilegiato su una retta; evidentemente, non appena sia conosciuto uno di questi ordini, l'altro lo è pure.

CONSEGUENZE

Nascono i concetti di:

- Retta orientata: ogni retta dotata di uno dei suoi due ordinamenti;

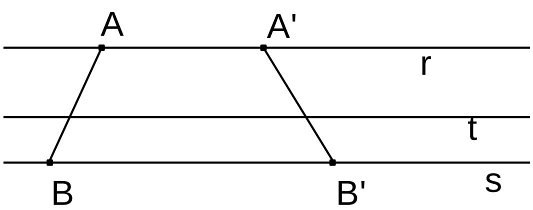
- Semiretta aperta di origine O: $\{P \in r : O<P\}$ oppure $\{P \in r : P<O\}$

- Segmento: $[A,B] = \{ P \in r : A \leq P \leq B\}$ oppure $\{ P \in r : B \leq P \leq A\}$;

- Insieme convesso di Π: è una parte X di Π tale che per ogni coppia di punti $P \in X$ e $Q \in X$ si ha $[P,Q] \subset X$; ad esempio Π, ogni retta, ogni semiretta e ogni intervallo sono convessi. L'intersezione di ogni famiglia (X_i) di parti convesse di Π è convessa.

Il secondo assioma di questo gruppo stabilisce un legame fra le strutture d'ordine delle diverse rette.

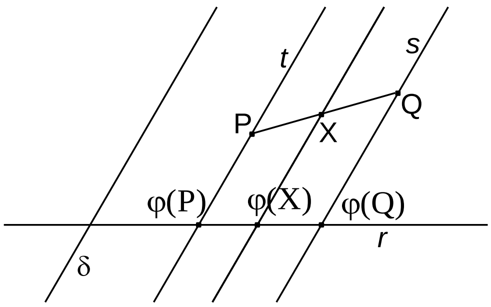
Assioma 5: **Per ogni coppia di rette parallele *r* ed *s* e per tutti i punti A, B ed A', B' con A, $A' \in r$ e B, $B' \in s$, ogni retta *t* parallela ad *r* e ad *s* che incontra [A,B] incontra anche $[A', B']$.**



CONSEGUENZE

Proposizione 1: Sia *r* una retta, δ una direzione distinta da quella di *r*, e φ la proiezione obliqua su *r* parallelamente a δ. Allora per tutti i punti P e Q di Π si ha $\varphi([P,Q]) = [\varphi(P), \varphi(Q)]$.
In altre parole: l'applicazione φ trasforma segmenti in segmenti.

Dimostrazione
La proposizione è ovvia se P e Q appartengono ad una retta di direzione δ poiché allora φ è costante su questa retta, per cui $\varphi([P,Q]) =$
$= \{\varphi(P)\} = \{\varphi(Q)\}$.
Altrimenti siano *t* ed *s* le rette di direzione δ passanti, rispettivamente, per P e Q.
L'assioma 5 dice che la φ è una biiezione di [P,Q] su $[\varphi(P), \varphi(Q)]$.
Di qui l'asserto.



Proposizione 2: Per ogni insieme convesso $X \subset \Pi$ la sua proiezione $\varphi(X)$ su *r* è convessa. Per ogni insieme convesso $X \subset r$, $\overline{\varphi}^{-1}(X)$ è convesso.

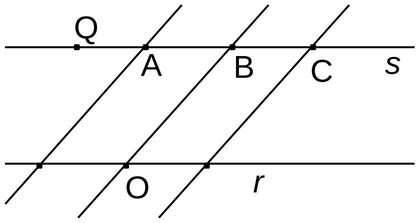
Proposizione 3: Siano *r* ed *s* due rette orientate e δ una direzione distinta da quella di *r* e di *s*. Allora la proiezione obliqua φ di *r* su di *s* parallelamente a δ è crescente o decrescente (per gli ordini di *r* ed *s*).

Dimostrazione
Questa proposizione esprime la monotonia delle proiezioni parallele.
Si tratta di far vedere che per ogni coppia di punti P e Q di *r*, P<Q implica $\varphi(P) < \varphi(Q)$ oppure $\varphi(P) > \varphi(Q)$.
La Proposizione 1, infatti, afferma che se $R \in [P,Q]$, cioè P<R<Q allora $\varphi(R) \in [\varphi(P), \varphi(Q)]$ cioè $\varphi(P) < \varphi(R) < \varphi(Q)$ oppure
$\varphi(P) < \varphi(R) < \varphi(Q)$.
Ne risulta che la φ è crescente o decrescente.

Proposizione 4: Ogni semiretta aperta di Π è non vuota.

Dimostrazione
Si consideri una retta *r* ed in particolare la semiretta $\{P: P \in r \text{ e } O<P\}$.
Per l'Assioma 1 esiste un punto $Q \notin r$ e per l'Assioma 3 la retta *s* parallela ad *r* e passante per Q.
Per l'Assioma 1 e l'Assioma 4 considero tre punti di *s* A, B, C tali che A<B<C e costruisco la retta passante per O e per B.

La proiezione obliqua su *r* parallelamente alla retta OB e la Proposizione 3 assicurano che entrambe le semirette di *r* di origine O sono non vuote.



Proposizione 5: Per ogni retta *r* esiste un'unica partizione di (Π-*r*) in due insiemi convessi Π_1 e Π_2.
Nessuno di questi due insiemi è vuoto e per ogni $P \in \Pi_1$ e $Q \in \Pi_2$ il segmento [P,Q] incontra *r*.

Tralasciamo la dimostrazione.[1]

***Definizione*: Gli insiemi Π_1 e Π_2 sono detti i semipiani aperti associati ad *r*;**
gli insiemi $\Pi_1 \cup r$ e $\Pi_2 \cup r$ sono i semipiani chiusi associati ad *r*.

NOTA SUL CONCETTO DI ANGOLO

"La nozione d'angolo è senza dubbio quella che solleva le maggiori discussioni e difficoltà nell'insegnamento della geometria.
Le difficoltà sono dovute, in parte, ad una terminologia imprecisa, in parte, ad un miscuglio confuso di parecchie nozioni matematiche e anche all'autentica difficoltà della questione.
Una prima confusione ha origine dal fatto che si utilizza la stessa parola "angolo", per designare dei concetti fra loro più o meno collegati, ma non di meno distinti quali: settore piano, coppia di semirette, misura, ecc…"[2].
Un modo classico per definire un angolo di vertice O è quello di presentarlo come intersezione di due semipiani chiusi le cui rette frontiera sono distinte e si secano in O.
Indubbiamente è un modo suggestivo di definire gli angoli convessi, perfettamente aderente alla nostra intuizione, facile da visualizzare e da disegnare.
Questa definizione di angolo, però, dà adito ad alcune difficoltà. Un angolo concavo, per esempio, non può essere definito come intersezione di semipiani. Non si riesce a capire, poi, che cosa sia un angolo maggiore di un angolo giro, che già coincide con tutto il piano: per poter definire la somma di due angoli di assegnato vertice è necessario introdurre angoli di questo tipo. Si potrebbe definire sull'insieme degli angoli di assegnato vertice O una relazione di equivalenza, per esempio una congruenza modulo l'angolo giro, e poi operare sulle classi di equivalenza. In questo caso, però, anche prescindendo dalla difficoltà di operare su classi di equivalenza, scompare ogni aderenza alla nostra intuizione, anzi nasce, dal punto di vista dell'intuizione, il paradosso che la somma di due angoli può essere, "visivamente", più "piccola" dei singoli addendi.
Un altro modo classico di definire gli angoli è di presentarli come coppia ordinata di semirette aventi la stessa origine e non appartenenti alla stessa retta. Anche con questa definizione, però, "sussistono ancora difficoltà quando si vogliono sommare due angoli; per superarle, si è condotti dapprima a introdurre una relazione di equivalenza nell'insieme

[1] Reperibile in [2], p. 17.
[2] Si veda [2], p. 91.

delle coppie di semirette ed a definire, poi, l'addizione sull'insieme quoziente associato a detta relazione. Un tale procedimento è del tutto corretto, ma invero assai pesante"[3].
Consapevole di queste difficoltà, Choquet rimanda l'introduzione degli angoli quasi alla fine della sua trattazione. Gran parte, infatti, della geometria elementare può essere svolta indipendentemente dal concetto di angolo.
"L'abuso degli angoli nel nostro insegnamento risale a ragioni storiche. Da un lato gli angoli sono fra i termini primitivi dell'assiomatica di Euclide e per molto tempo il postulato delle parallele è stato enunciato in forma angolare; d'altra parte i continuatori di Euclide, non appena ebbero compreso in modo sufficiente la nozione d'angolo orientato e d'angolo di rette, ritennero necessario farne un uso generale non giustificato. A maggior ragione si può sviluppare quasi tutta la geometria senza mai parlare della "misura" degli angoli. Sta di fatto che se questa è uno strumento essenziale dell'analisi e delle matematiche applicate, in geometria molto sovente non è altro che una comodità e talvolta una sorgente di errori"[4].
Choquet, come vedremo, introduce gli angoli di vertice O mediante le rotazioni di centro O superando di colpo tutte le difficoltà inerenti alla somma degli angoli, perché, con tale definizione, gli angoli di vertice O sono un gruppo commutativo.

CAPITOLO III

ASSIOMA DI STRUTTURA METRICA

Introduzione

Quello che fra poco introdurremo è un assioma, di tipo esistenziale, che descrive il concetto di distanza ed utilizza i numeri reali. Non tutte le proprietà dell'insieme $\Re$, però, sono adoperate in questo studio della geometria elementare, ma solo quelle legate alla struttura di $\Re$ come campo totalmente ordinato ed archimedeo.
In particolare non viene utilizzata la proprietà di completezza nella sua forma generale per cui è possibile, per ora, evitare il ricorso a concetti quali quello di estremo superiore, sezione, successione crescente, successione di Cauchy, ecc.
A livello di primo biennio delle scuole secondarie superiori, nel nostro insegnamento, l'assioma di continuità viene introdotto, in forme diverse, al momento di studiare le mutue posizioni di una retta e di una circonferenza o di due circonferenze. Solo allora, infatti, diventa necessario.
Se di questi due fatti possediamo una traduzione analitica, allora ci riduciamo a considerare sistemi di equazioni di cui una di primo grado e l'altra di secondo grado.
Si tratta in sostanza di risolvere un'equazione di secondo grado.
Ciò che ci deve essere garantito, allora, è l'esistenza della radice quadrata di ogni numero reale positivo.
Ebbene, Choquet utilizza la completezza dei numeri reali solo in questa forma molto debole.

[3] Si veda [2], p. 91-92.
[4] Si veda [2], p. 92-93.

Volendo fare riferimento all'assiomatica di Choquet per studiare la geometria a livello di primo biennio delle scuole medie superiori si pone, dunque, il problema della introduzione dei numeri reali.
Riteniamo, anzitutto, che sia sconsigliabile far ricorso ai concetti di sezione, coppie di classi contigue, successione di Cauchy, ecc…, per introdurre i numeri reali: l'esperienza dice che ci sono difficoltà enormi di comprensione anche in età più avanzata.
Forse è possibile fare una descrizione assiomatica dei reali presentandola semplicemente come una sintesi di ciò che gli allievi sanno già sui numeri.
In modo più dettagliato: gli alunni conoscono già il campo dei razionali, campo totalmente ordinato ed archimedeo; hanno già imparato ad estrarre la radice quadrata dei razionali positivi.
Si tratta, allora, di presentare i numeri reali come un campo totalmente ordinato, archimedeo nel quale gli elementi positivi hanno una radice quadrata.[1]

<u>*Assioma 6*</u>: **Al piano Π è associata una applicazione d, detta distanza, di $\Pi\times\Pi$ in $\Re$ che gode delle seguenti proprietà:**

- **$d(P,Q)\geq 0$ e $d(P,Q)=0 \Leftrightarrow P=Q$ per ogni coppia P, Q di punti del piano**
- **$d(P,Q)= d(Q,P)$ per ogni coppia P, Q di punti del piano**
- **$d(P,Q)\leq d(P,R)+d(R,Q)$ per ogni terna P, Q, R di punti del piano in particolare si ha $d(P,Q)=d(P,R)+d(R,Q) \Leftrightarrow R\in[P,Q]$**
- **per ogni semiretta r_o' e per ogni numero reale $x\geq 0$ esiste su r_o' uno ed un solo punto P tale che $d(O,P)=x$**

Osservazione: L'unicità del punto P dell'ultima proprietà può essere dimostrata.

Una prima importante conseguenza dell'assioma 6 è l'esistenza di un isomorfismo, unico, tra $\Re$ ed una retta puntata, sulla quale, cioè, sia stato fissato un punto O, isomorfismo che conserva la struttura di questa retta associata al suo ordine ed alla sua distanza.
Vale, infatti, il seguente

Teorema 1
Per ogni retta orientata *r* e per ogni punto $O\in r$ esiste un'unica applicazione $f: r\rightarrow\Re$ tale che:

- f è crescente
- $f(O)=0$
- $\forall$ P, $Q\in r$, $|f(Q)-f(P)|=d(P,Q)$
- f è biiettiva

Tralasciamo qui la dimostrazione.[2]

Notiamo solo che la definizione della funzione f, per ogni punto P di *r*, $P\neq O$, è la seguente:

$f(P)=d(O,P)$ se $O<P$
$f(P)=-d(O,P)$ se $P<O$

[1] Una diversa proposta per l'introduzione dei numeri reali nella scuola media superiore è quella descritta in [4], Cap. 11.
[2] Per la dimostrazione si veda [2], p. 22-23.

Teorema 2
Per ogni coppia di punti distinti P e Q esiste ed è unico il punto M della retta PQ tale che $d(P,M)=d(M,Q)$.

Dimostrazione
E' una conseguenza immediata dell'Assioma 6 punto 4.

Un'altra importante conseguenza è l'introduzione del concetto di isometria.

***Definizione*: Una applicazione $f: \Pi \to \Pi$, cioè del piano in sé si dice isometria se**
- **f è biiettiva**
- **per ogni coppia di punti P,Q del piano Π $d(f(P),f(Q))=d(P,Q)$**

Osservazione: Si poteva richiedere solamente la suriettività di f e dimostrarne, in base alla definizione, l'iniettività.

Teorema 3
Le isometrie piane formano gruppo.

Dimostrazione
- il prodotto di due isometrie f e g è un'isometria.
  Il prodotto $g \circ f$ è biiettivo, si tratta allora di far vedere che
  $d(P,Q)=d(g \circ f(P), g \circ f(Q))$.
  $d(g \circ f(P), g \circ f(Q)) = d(g(f(P), g(f(Q)) = d(f(P), f(Q)) = d(P,Q)$.
- questo prodotto è associativo (si tratta di biiezioni).
- l'identità funziona da elemento neutro.
- l'inversa f^{-1} di una isometria f è ancora un'isometria.
  Si tratta di far vedere che per ogni coppia P,Q di punti di Π si ha
  $d(f^{-1}(P), f^{-1}(Q)) = d(P,Q)$.
  Infatti: $d(f^{-1}(P), f^{-1}(Q)) = d(f(f^{-1}(P), f(f^{-1}(Q))) = d(P,Q)$.

***Definizione*: Se F_1 e F_2 sono figure piane si dice che F_1 è isometrica (o congruente) a F_2 se esiste una isometria g tale che $g(F_1)=F_2$.**

Osservazione: La relazione di congruenza fra figure piane è una relazione di equivalenza.

Dimostrazione
Per dimostrare la proprietà riflessiva si ricorre all'identità, per la proprietà simmetrica alla isometria inversa, per la proprietà transitiva alla composizione di isometrie.

Osservazione: Una isometria f rispetto alle operazioni insiemistiche $\cup$ e $\cap$ si comporta nel modo seguente:
$f(X \cap Y)=f(X) \cap f(Y)$
$f(X \cup Y)=f(X) \cup f(Y)$
essendo X e Y sottoinsiemi del piano.

PROPRIETÀ DELLE ISOMETRIE

a- Una isometria trasforma punti allineati in punti allineati ed inoltre se $P \le R \le Q$ allora $f(P) \le f(R) \le f(Q)$ oppure $f(Q) \le f(R) \le f(P)$.

Si ha: $d(P,Q) = d(P,R) + d(R,Q) \Leftrightarrow$ P,Q,R sono allineati ed $R \in [P,Q]$.
Poiché f è un'isometria si ha:
$d(f(P),f(Q)) = d(P,Q) = d(P,R)+d(R,Q) = d(f(P),f(R))+d(f(R),f(Q))$ e quindi, per l'Assioma 6, f(P), f(Q), f(R) sono allineati e $f(R) \in [f(P),f(Q)]$, cioè $f([P,Q]) \subset [f(P),f(Q)]$.
Analogamente, poiché f^{-1} è una isometria, $f^{-1}([f(P),f(Q)]) \subset [P,Q]$ e quindi $[f(P),f(Q)] \subset f([P,Q])$.
In conclusione: $f([P,Q]) = [f(P),f(Q)]$. Ovvero la f trasforma segmenti in segmenti.

b- Una isometria trasforma convessi in convessi.
(Conseguenza immediata della proprietà a-).

c- Una isometria trasforma rette in rette, cerchi in cerchi, dischi in dischi.

d- Una isometria f trasforma i semipiani opposti rispetto ad una retta r nei semipiani opposti rispetto alla retta f(r).

Siano α'_r e α''_r i semipiani (aperti) opposti rispetto ad *r*. Dobbiamo dimostrare che:

i) $f(\alpha'_r)$ e $f(\alpha''_r)$ sono convessi (ovvio per il punto b), disgiunti e non vuoti

ii) $f(\alpha'_r) \cup f(\alpha''_r) = \Pi - f(r)$

Ricordiamo che se A e B sono due insiemi, si ha: $A \backslash B = A \cap C_A B$.
Essendo $\alpha'_r \cup \alpha''_r = \Pi - r$ si ha $f(\alpha'_r) \cup f(\alpha''_r) = f(\alpha'_r \cup \alpha''_r) = f(\Pi - r) = f(\Pi \cap C_\Pi r) =$
$= f(\Pi) \cap f(C_\Pi r) = \Pi \cap f(C_\Pi r) = \Pi - f(r)$.

e- Una isometria trasforma rette parallele in rette parallele.

Osservazione: A questo punto si possono introdurre le similitudini e dimostrare che formano un gruppo di cui le isometrie sono un sottogruppo.

***Definizione*: Una similitudine di Π in sé è una applicazione $f: \Pi \to \Pi$ tale che**
1) **f è biiettiva;**
2) **$d(f(P),f(Q)) = kd(P,Q)$ con k>0 e P,Q punti qualsiasi di Π.**

Osservazione: Il numero k si dice *rapporto di similitudine*. Per k=1 si ottengono le isometrie.

CAPITOLO IV

ASSIOMA DEL PIEGAMENTO

Introduzione
Gli assiomi del capitolo precedente ci hanno permesso di parlare di isometrie; ancora, però, non sappiamo se esistono isometrie del piano diverse dalla identità.
Sarà compito dell'ultimo gruppo di assiomi assicurarci l'esistenza di tali isometrie.
Il piegamento rispetto ad una retta ci permetterà di definire la simmetria assiale che, nel seguito, giocherà un ruolo fondamentale perché con le simmetrie assiali potremo generare tutto il vasto mondo delle isometrie.
Notiamo esplicitamente che le simmetrie assiali hanno un forte contenuto intuitivo non solo perché la natura è ricca di "cose" simmetriche, ma anche perché esse sono la schematizzazione e la matematizzazione di azioni concrete molto semplici e comuni come il piegamento di un foglio, il ribaltamento intorno ad una retta, la riflessione in uno specchio.

E' necessario, anzitutto, definire il piegamento intorno ad una retta *r*.

***Definizione*: Si chiama piegamento intorno ad una retta r ogni applicazione**
$\mathbf{f}_r : \Pi_1 \cup r \to \Pi_2 \cup r$ **tale che:**

a) **sia biiettiva**
b) **conservi le distanze**
c) $\mathbf{f}_r(\mathbf{P}) = \mathbf{P} \quad \forall\, \mathbf{P} \in r$

<u>*Assioma 7*</u>: **Per ogni retta r esiste uno ed un solo piegamento $\mathbf{f}_r$ intorno ad essa.**

Osservazione: L'unicità del piegamento può essere dimostrata.

Siamo ormai in grado di sviluppare tutta la geometria piana elementare.
Qui si metteranno in evidenza solo alcuni risultati fondamentali.

SIMMETRIA RISPETTO AD UNA RETTA
La simmetria rispetto ad una retta è un concetto fondamentale nella trattazione di Choquet. Alla sua definizione si arriva utilizzando il concetto di piegamento f_r. Esso è definito sul semipiano chiuso $\Pi_1 \cup r$, mentre la simmetria S_r rispetto ad una retta *r* è definita su tutto il piano Π. Basterà, allora, estendere f_r a tutto il piano.
Definiamo allora il prolungamento $\hat{f}_r$ di f_r al piano Π.

***Definizione*: Si dice prolungamento $\hat{\mathbf{f}}_r$ del piegamento $\mathbf{f}_r$ intorno alla retta r l'applicazione $\hat{\mathbf{f}}_r : \Pi \to \Pi$ tale che:**

$$\hat{\mathbf{f}}_r(\mathbf{P}) = \mathbf{f}_r(\mathbf{P}) \quad \forall \mathbf{P} \in \Pi_1 \cup r$$
$$\hat{\mathbf{f}}_r(\mathbf{P}) = \mathbf{f}_r^{-1}(\mathbf{P}) \quad \forall \mathbf{P} \in \Pi_2$$

In questo modo $\hat{f}_r$ è definita su tutto Π. La simmetria rispetto ad una retta *r*, S_r, non è altro che $\hat{f}_r$. Diamo pertanto la seguente

***Definizione*: Chiamiamo simmetria S_r rispetto ad una retta r il prolungamento $\hat{f}_r$ del piegamento f_r intorno ad r.**

Vogliamo, ora, mettere in risalto alcune importanti proprietà di S_r ed il ruolo che essa gioca in alcuni concetti matematici.

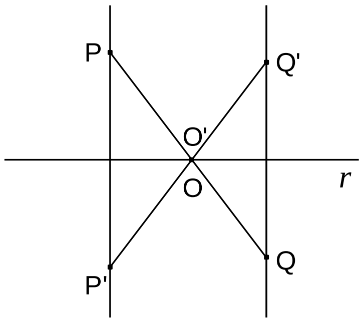
Teorema 1

S_r è una isometria involutoria, cioè $S_r^2 = \mathrm{Id}$ e inoltre $S_r(\mathrm{P}) = \mathrm{P}$ se e solo se $\mathrm{P} \in r$.

Dimostrazione

Che S_r sia involutoria ed abbia i punti di *r* come unici punti uniti è ovvio per la stessa definizione di S_r. Pure ovvio, e per lo stesso motivo, è che S_r sia una isometria quando i punti P e Q appartengono allo stesso semipiano chiuso.

Dimostriamo, perciò, che S_r conserva le distanze nel caso in cui ad esempio $\mathrm{P} \in \Pi_1$ e $\mathrm{Q} \in \Pi_2$.



Sia $\mathrm{O} = r \cap [\mathrm{P},\mathrm{Q}]$, $\mathrm{P}' = S_r(\mathrm{P})$, $\mathrm{Q}' = S_r(\mathrm{Q})$, $\mathrm{O}' = r \cap [\mathrm{P}',\mathrm{Q}']$.

Si ha: $d(\mathrm{OP}) = d(\mathrm{O},\mathrm{P}')$; $d(\mathrm{Q},\mathrm{O}) = d(\mathrm{Q}',\mathrm{O})$.

Perciò: $d(\mathrm{P}',\mathrm{Q}') \le d(\mathrm{P}',\mathrm{O}) + d(\mathrm{O},\mathrm{Q}') = d(\mathrm{P},\mathrm{O}) + d(\mathrm{O},\mathrm{Q}) = d(\mathrm{P},\mathrm{Q})$.

D'altra parte: $d(\mathrm{O}',\mathrm{P}) = d(\mathrm{O}',\mathrm{P}')$, $d(\mathrm{O}',\mathrm{Q}) = d(\mathrm{O}',\mathrm{Q}')$.

Perciò: $d(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \le d(\mathrm{P},\mathrm{O}') + d(\mathrm{O}',\mathrm{Q}) = d(\mathrm{P}',\mathrm{O}') + d(\mathrm{O}',\mathrm{Q}') = d(\mathrm{P}',\mathrm{Q}')$.

In definitiva: $d(\mathrm{P}',\mathrm{Q}') \le d(\mathrm{P},\mathrm{Q})$ e $d(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \le d(\mathrm{P}',\mathrm{Q}')$.

Quindi $d(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = d(\mathrm{P}',\mathrm{Q}')$.

Osservazione

Il punto $\mathrm{P}' = S_r(\mathrm{P})$ si dice simmetrico di P rispetto ad *r*.

I due punti P e P' stanno in semipiani opposti rispetto ad *r* e quindi il segmento $[\mathrm{P},\mathrm{P}']$ taglia *r* in un punto P_o che si dice *proiezione ortogonale* di P su *r*.

Poiché S_r è involutoria allora P è il simmetrico di P' rispetto ad *r* e P_o è anche la proiezione ortogonale di P' su *r*.

Il numero $d(\mathrm{P},\mathrm{P}_o)$ si chiama *distanza di* P da *r* e si indica con d(P, *r*).

Il punto P_o è caratterizzato da una proprietà di minimo: è il punto di *r* a distanza minima da P.

Vale, infatti, il seguente

Teorema 2

Sia $\mathrm{P} \notin r$ e $\mathrm{P}_o \in r$. Condizione necessaria e sufficiente affinché P_o sia la proiezione ortogonale di P su *r* è che per ogni $\mathrm{Q} \in r$, $\mathrm{Q} \neq \mathrm{P}_o$ si abbia $d(\mathrm{P},\mathrm{P}_o) < d(\mathrm{P},\mathrm{Q})$.[1]

[1] Si può vedere la dimostrazione in [4], p. 193-194.

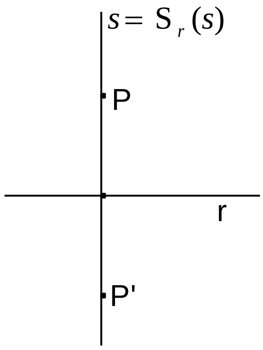
LA RELAZIONE DI PERPENDICOLARITÀ

Mediante la simmetria assiale possiamo introdurre nella famiglia *R* delle rette del piano Π la relazione binaria di perpendicolarità, indipendentemente dalla nozione di angolo retto. Alla base della nozione di perpendicolarità sta l'asserto seguente:

Teorema 3
Siano *r* ed *s* due rette diverse del piano.
Le seguenti proposizioni sono equivalenti:

1) $S_r(s) = s$;
2) da $P \in s$, $P \neq r \cap s$, segue che *s* è la congiungente P con P' simmetrico di P rispetto ad *r*;
3) da $P \in s$, $P \neq r \cap s$, segue che $r \cap s$ è la proiezione ortogonale P_o di P su *r*.

Dimostrazione
La si legge completamente sulla figura.



***Definizione*: La retta s si dice perpendicolare alla retta r ($s \perp r$) se:**
- **$s \neq r$**
- **è verificata una delle tre condizioni del teorema 3.**

Le proprietà della relazione di perpendicolarità sono espresse dal seguente teorema.

Teorema 4

1) se $s \perp r$ allora $r \cap s \neq \emptyset$;
2) se $s \perp r$ allora $r \perp s$;
3) se $r \perp s$ allora $s \,//\, s'$ se e solo se $r \perp s'$;
4) per un punto $P \in \Pi$ passa una ed una sola retta *s* perpendicolare ad una retta *r*.

Tralasciamo qui la dimostrazione dei punti 1), 2), 3).[2]
Riportiamo la dimostrazione del solo punto 4).

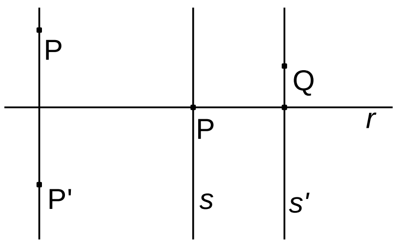
Dimostrazione
Nel punto 4) si affermano due fatti:

a) esiste una retta *s* passante per P e perpendicolare ad *r*;
b) questa perpendicolare è unica.

Quest'ultima affermazione è una conseguenza del punto 3), infatti se *s* e s' passano per P e sono perpendicolari ad *r*, allora $s \,//\, s'$. Quindi, poichè passano per uno stesso punto, $s = s'$.
Per dimostrare a) occorre distinguere due casi illustrati nella figura.

a_1) P non appartiene ad *r*. Allora $P' = S_r(P) \neq P$ e la retta PP' è perpendicolare ad *r* per il punto 2) del Teorema 3 e per la successiva definizione.

a_2) $P \in r$. Sia $Q \notin r$. Per a_1) esiste $s' \ni Q$ e $s' \perp r$. Dal punto 3) segue che la retta *s* passante per P e parallela ad s' è perpendicolare ad *r*.



[2] Per il punto 2) si veda [4], p. 194-195.

Osservazione: Se $s \perp r$ allora s è unita nella S_r, cioè $S_r(s) = s$, ma non è retta di punti uniti.

ASSE DI UN SEGMENTO

Siano A e B due punti distinti di centro O, cioè $d(A,O) = d(O,B)$ e $O \in [A,B]$.

***Definizione*: Si dice asse del segmento [A,B] la perpendicolare r alla retta AB passante per O.**

Osservazione: I due punti A e B sono simmetrici rispetto alla retta r.

Le proprietà dell'asse di un segmento sono riassunte dal seguente teorema.

Teorema 5

Sia *r* l'asse del segmento [A,B] e sia α'_r il semipiano aperto di origine *r* che contiene A; α''_r il semipiano aperto di origine *r* che contiene B.

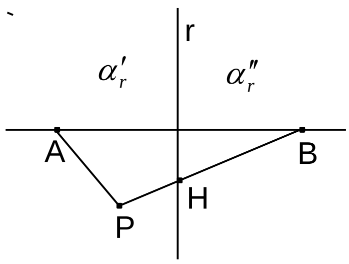
Si ha, allora:

1) $P \in r \Leftrightarrow d(A,P) = d(B,P)$
2) $P \in \alpha'_r \Leftrightarrow d(A,P) < d(B,P)$
3) $P \in \alpha''_r \Leftrightarrow d(B,P) < d(A,P)$

Dimostrazione

Le tre condizioni di sinistra si escludono mutuamente a vicenda e così pure le tre condizioni a destra. Siccome una delle tre condizioni certamente si verifica, basta provare che:

- da $P \in r$ segue $d(A,P) = d(B,P)$. E' conseguenza del fatto che $S_r(A) = B$ e $S_r(P) = P$.
- da $P \in \alpha'_r$ segue d(A,P)<d(B,P). Lo si legge facilmente sulla figura, ricorrendo alla disuguaglianza triangolare.



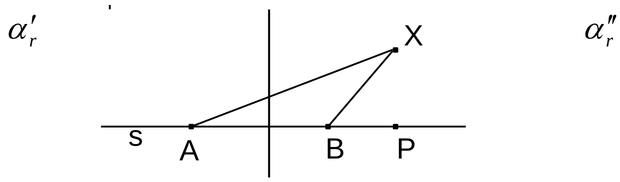
- da $P \in \alpha''_r$ segue d(B,P)<d(A,P). Ovvio.

Una conseguenza abbastanza immediata di questo teorema riguarda il confronto fra le oblique.

Corollario 1

Sia [A,B] un segmento ed $s = AB$ la retta sostegno; sia X un punto qualunque e P la sua proiezione ortogonale su s. Allora la relazione d'ordine che esiste fra d(A,P) e d(B,P) esiste anche fra d(A,X) e d(B,X).

Dimostrazione
Basta calcolare d(A,P)-d(B,P). A seconda che esso è nullo, positivo o negativo il punto P (e dunque X) appartiene all'asse *r* di [A,B], ad α''_r o ad α'_r.



Osservazione
Questo risultato si può anche esprimere dicendo che la lunghezza di una obliqua è funzione strettamente crescente della lunghezza della sua proiezione.

Un secondo corollario esprime una proprietà importante del triangolo isoscele:
l'altezza relativa alla "base" è asse di simmetria del triangolo.

Corollario 2
Sia (O,A,B) un triangolo con $d(O,A) = d(O,B)$ e $A \neq B$. Allora la proiezione di O sulla retta AB è il centro di [A,B]. (E' una conseguenza del Corollario 1).

Teorema 6
Sia f una isometria del piano, O un punto unito di f e P un punto non unito, cioè $P \neq f(P)$. Allora O è un punto dell'asse di [P,f(P)].

Dimostrazione
$d(O,P) = d(f(O),f(P)) = d(O,f(P))$

Il seguente teorema studia il rapporto tra isometrie e simmetrie assiali e descrive l'importante ruolo che le simmetrie assiali giocano nella costruzione delle isometrie.

Teorema 7
Ogni isometria di Π, $f : \Pi \to \Pi$ è prodotto, al più, di tre simmetrie assiali.

Alla dimostrazione del teorema premettiamo tre lemmi.

Lemma 1
Ogni isometria f di Π che abbia almeno tre punti uniti non allineati O_1, O_2, O_3, è l'identità.

Dimostrazione
Si procede per assurdo. Se fosse $f \neq Id$ esisterebbe $P \neq f(P)$: allora, per il Teorema 5, O_1, O_2, O_3 starebbero sull'asse del segmento [P,f(P)], assurdo perché i tre punti non sono allineati.

Il secondo lemma fornisce una caratterizzazione della simmetria assiale.

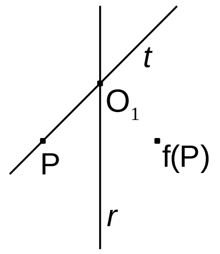
Lemma 2
Ogni isometria $f : \Pi \to \Pi$ che abbia uniti almeno due punti distinti, O_1 ed O_2, o è l'identità oppure è la simmetria rispetto alla retta $O_1 O_2$.

Dimostrazione
Se $f \neq Id$ allora esiste $P \neq f(P)$. L'asse di [P,f(P)] contiene i punti O_1 ed O_2 e quindi è la retta $r = O_1 O_2$. I punti P, O_1, O_2 non sono allineati. Sia S_r la simmetria rispetto ad *r*.

Si ha:
$S_r \circ f(O_1) = O_1$; $S_r \circ f(O_2) = O_2$; $S_r \circ f(P) = P$.
Per il Lemma 1 $S_r \circ f = Id$ cioè $f = S_r$.

Lemma 3
Ogni isometria $f: \Pi \to \Pi$ che abbia almeno un punto unito O_1, o è l'identità, o è una simmetria assiale il cui asse contiene O_1 o è il prodotto di due di tali simmetrie.

Dimostrazione
Se $f \neq Id$ allora esiste $P \neq f(P)$. L'asse *r* di [P,f(P)] passa per O_1.
Si ha $S_r \circ f(O_1) = O_1$; $S_r \circ f(P) = P$.
Per il Lemma 2, quindi



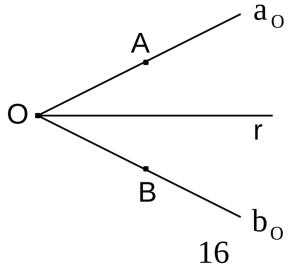
$S_r \circ f = Id$ cioè $f = S_r$
oppure
$S_r \circ f = S_t$ cioè $f = S_r \circ S_t$

Siamo, ora, in grado di dimostrare il Teorema 7.

a) Se $f = Id$ allora $f = S_r \circ S_r$, dove *r* è una retta qualsiasi.
b) Se $f \neq Id$ allora esiste $P \neq f(P)$.
   Sia *r* l'asse del segmento [P,f(P)].
   Si ha: $S_r \circ f(P) = P$.
   Per il Lemma 3 si ha:
   $S_r \circ f = Id$ cioè $f = S_r$
   oppure
   $S_r \circ f = S_t$ cioè $f = S_r \circ S_t$
   oppure
   $S_r \circ f = S_t \circ S_u$ cioè $f = S_r \circ S_t \circ S_u$

Osservazione
Nel Teorema 7, come nei Lemmi necessari alla sua dimostrazione, abbiamo parlato di isometria $f: \Pi \to \Pi$. Gli stessi risultati, con le stesse dimostrazioni, valgono se parliamo di isometria $f: X \to \Pi$ con $X \subset \Pi$.
Partendo da questa situazione possiamo prolungare f a tutto Π costruendo una isometria $g: \Pi \to \Pi$, in modo unico se X non è allineato, in due modi se X è allineato e contiene almeno due punti.

BISETTRICI E BANDIERE
Siano a_o e b_o due semirette di origine O e sia $A \in a_o$ e $B \in b_o$ con $d(O,A) = d(OB)$.
L'asse *r* del segmento [A,B] passa per O; ovviamente $S_r(a_o) = b_o$.

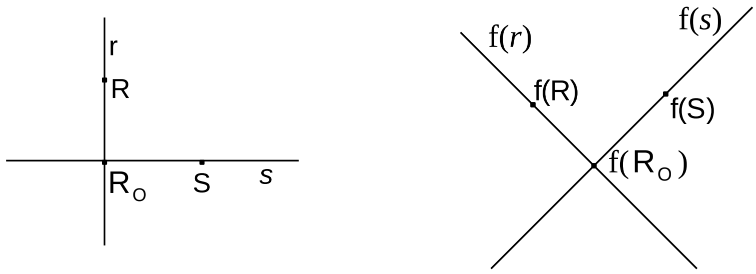


Definizione: **La retta r, asse del segmento [A, B], è la bisettrice della coppia di semirette (a_o, b_o).**

Se a_o e b_o sono semirette opposte rispetto ad O allora *r* è la perpendicolare in O alla retta contenente a_o e b_o.
Se $a_o = b_o$ si prende come bisettrice della coppia (a_o, a_o) la retta *a* contenente a_o.

Diamo ora la definizione di *bandiera.*
Consideriamo un punto O, una semiretta a_o di origine O ed uno dei due semipiani α_a di origine *a*.
L'insieme $A = \{O\} \cup a_o \cup \alpha_a$ si chiama bandiera di pomo O, asta a_o, drappo α_a.
Per le proprietà delle isometrie si ha, se f è una isometria, $f(A) = \{f(O)\} \cup f(a_o) \cup f(\alpha_a)$ cioè un'altra bandiera.

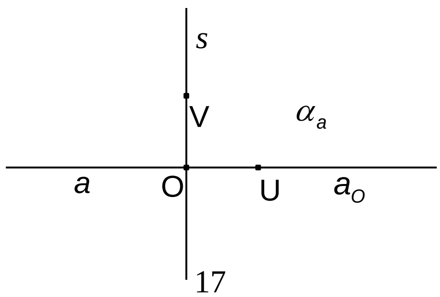
Dalle proprietà delle isometrie e della proiezione ortogonale di un punto si ricava che una isometria f trasforma rette perpendicolari in rette perpendicolari.
Le informazioni si leggono dalle seguenti figure.



La dimostrazione è basata sul fatto che da $d(R, R_o) < d(R,S)$ deriva $d(f(R),f(R_o)) < d(f(R),f(S))$.
I rapporti tra isometrie e bandiere sono regolati dai due seguenti teoremi:

Teorema 8
Se A è una bandiera ed f una isometria tale che $f(A) = A$, allora $f = Id$.

Dimostrazione
Alla bandiera A associamo la terna di punti non allineati (O, U, V), come in figura con $d(O,U) = d(O,V) = 1$.
Ovviamente: $f(O) = O$, $f(a_o) = a_o$, $f(U) = U$, $f(s) = s$ perché perpendicolare ad *a*, $f(\alpha_a) = \alpha_a$ e quindi $f(V) = V$. Si conclude che $f = Id$ (Lemma 1).



Teorema 9
Siano $A=\{O\}\cup a_o \cup \alpha_a$, $B=\{P\}\cup b_P \cup \beta_b$ due bandiere. Esiste una ed una sola isometria f tale che $f(A)=B$.

Dimostrazione
a) <u>Unicità</u>. Se $f(A)=B$ e $g(A)=B$ allora $g^{-1}\circ f(A)=A$ cioè $g^{-1}\circ f = Id$ da cui $f=g$.
b) <u>Esistenza</u>. Si costruisce come prodotto, al più, di tre simmetrie: S_r dove *r* è l'asse del segmento [O,P]; S_q essendo *q* la bisettrice di $(f(a_o), b_P)$; S_b essendo *b* la retta sostegno di b_P.

CAPITOLO V

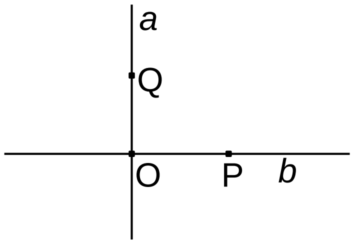
LA SIMMETRIA CENTRALE

Introduzione
Abbiamo visto che ogni isometria è prodotto, al più, di tre simmetrie assiali. Dopo aver studiato la simmetria assiale, resta da vedere il prodotto di due simmetrie assiali ed il prodotto di tre simmetrie assiali.
Iniziamo il nostro studio con la simmetria centrale, caso particolare di rotazione.
In questa scelta influiscono motivi di comodità, di semplicità, di "popolarità". Sono molte, infatti, le configurazioni dotate di centro di simmetria.

Definizione: **Siano *a* e *b* due rette perpendicolari in O.**
Si chiama simmetria di centro O il prodotto $\mathbf{S_O = S_b \circ S_a}$.

Corollario 1
La simmetria rispetto ad un punto è una isometria.

Proprietà
- S_O è involutoria, cioè $(S_b \circ S_a)^2 = Id$
  Dimostrazione
  Consideriamo i tre punti non allineati O, P, Q, con a∩b = O, Q $\in$ a, P $\in$ b.
  Si ha:
  $(S_b \circ S_a)^2(O)=O$
  $(S_b \circ S_a)^2(P)=P$
  $(S_b \circ S_a)^2(Q)=Q$
  vale quindi la tesi.



- $S_b \circ S_a = S_a \circ S_b$
  Dimostrazione
  $S_a \circ S_b = (S_a \circ S_b)^{-1} = S_b^{-1} \circ S_a^{-1} = S_b \circ S_a$

Definizioni:

- **Parallelogramma: è una quaterna di punti A B $A'B'$ tali che le due coppie diagonali AA' e BB' hanno lo stesso centro.**

- **Rettangolo: è una quaterna A B A' B' nella quale i lati consecutivi sono perpendicolari.**

Teorema 1
Se $S_O(P) = P'$ allora O è il punto medio di $[P, P']$.[1]

Corollario 2
$S_O(r) = r$ se $O \in r$**,** cioè ogni retta passante per il centro è una retta unita.

Teorema 2
$S_O(r)//r$ qualunque sia la retta *r*, ovvero S_O trasforma ogni retta in una retta ad essa parallela.

Dimostrazione
1) Se $O \in r$ il teorema è vero per il corollario precedente.
2) Se *r* non passa per O, sia r' la retta per O parallela ad *r*.
   Si ha $S_O(r')//S_O(r)$, ma $S_O(r') = r'$, $r//r'$ e quindi $S_O(r)//r'//r$.

Osservazione 1
Tenendo presente la definizione di parallelogramma ed i concetti finora espressi possiamo dire che il comune centro delle diagonali è centro di simmetria del parallelogramma, i cui lati opposti sono perciò paralleli e congruenti.

Osservazione 2
Spesso si definisce simmetria di centro O l'applicazione $S_O : \Pi \to \Pi$ definita da $S_O(O) = O$ e $S_O(P) = P'$ per $P \neq O$, dove P' è punto della retta OP tale che O viene ad essere il centro di $[P,\ P']$.

A questo punto è ovvia l'equivalenza fra questa definizione e quella che noi abbiamo dato.

TEOREMA DI TALETE
In questa trattazione della geometria elementare il teorema di Talete rappresenta, senza dubbio, un punto delicato. La difficoltà potrebbe essere ovviamente evitata includendo il teorema di Talete fra i postulati.

Al teorema di Talete premettiamo tre lemmi, che ci limitiamo ad enunciare.[2]

Lemma 1
Siano *p*, *a*, p' tre rette parallele distinte.
1) Se p' è la simmetrica di *p* rispetto ad *a*, ogni secante le incontra in tre punti P, A, P' tali che A è il centro di $[P, P']$.
2) Inversamente, se esiste una secante che abbia questa proprietà, p' è la simmetrica di di *p* rispetto ad *a*

[1] Vedere dimostrazione in [4], p. 203-204.
[2] Dimostrazioni reperibili in [2], p.160.

Lemma 2 (Forma debole del teorema di Talete)
Se tre rette parallele p, a, p' sono tagliate da una secante in tre punti P, A, P' tali che A sia il centro di $[\mathrm{P}, \mathrm{P}']$, lo stesso accade per ogni secante.

Lemma 3
Sia $\Re^+$ l'insieme dei numeri reali positivi e sia $\mathrm{g}: \Re^+ \to \Re^+$ una funzione con le seguenti proprietà:
- $\mathrm{g}(\mathrm{x}+\mathrm{x}') = \mathrm{g}(\mathrm{x}) + \mathrm{g}(\mathrm{x}')$ per ogni x, $\mathrm{x}' \in \Re^+$
- g è crescente, cioè da $\mathrm{x} < \mathrm{x}'$ segue $\mathrm{g}(\mathrm{x}) < \mathrm{g}(\mathrm{x}')$

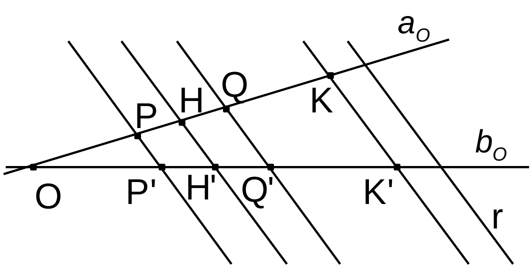
Sotto queste ipotesi g è definita dalla seguente relazione:

$$\mathrm{g}(\mathrm{x}) = \mathrm{kx} \text{ (dove } \mathrm{k} = \mathrm{g}(1)\text{) per ogni } \mathrm{x} \in \Re^+.$$

Teorema 3 (di Talete)
Siano a_o e b_o due semirette con la stessa origine O e sia r una retta che interseca entrambe le semirette (fuori di O). La proiezione obliqua f della retta a sulla retta b parallelamente alla retta r trasforma biunivocamente a_o con b_o in guisa che esiste un numero k>0 con la proprietà:

$$\mathrm{d}(\mathrm{O},\mathrm{f}(\mathrm{P})) = \mathrm{kd}(\mathrm{O},\mathrm{P}) \quad \text{per ogni punto } \mathrm{P} \in a_o.$$

Dimostrazione
Con le notazioni della figura, sia $\mathrm{f}: a_O \to b_O$ la proiezione parallelamente ad r.
Per ogni $\mathrm{P} \in a_O$ poniamo $\mathrm{x} = \mathrm{d}(\mathrm{O},\mathrm{P})$, $\mathrm{g}(\mathrm{x}) = \mathrm{d}(\mathrm{O},\mathrm{f}(\mathrm{P}))$. Per l'Assioma 6 risulta così definita una applicazione $\mathrm{g}: \Re^+ \to \Re^+$. Dalla Proposizione 3 cap. 2 segue che g è crescente.
Infine la prima proprietà del Lemma 3 segue dal Lemma 2. Siano, infatti, x e y due numeri reali positivi con x<y e siano P e Q due punti di a_o tali che $\mathrm{d}(\mathrm{O},\mathrm{P}) = \mathrm{x}$ e $\mathrm{d}(\mathrm{O},\mathrm{Q}) = \mathrm{y}$. Sia H il punto di mezzo del segmento [P,Q] e K il simmetrico di O rispetto ad H. E' immediato constatare che $\mathrm{d}(\mathrm{O},\mathrm{K}) = \mathrm{d}(\mathrm{O},\mathrm{H}) + \mathrm{d}(\mathrm{H},\mathrm{K}) = \mathrm{d}(\mathrm{O},\mathrm{P}) + \mathrm{d}(\mathrm{P},\mathrm{H}) + \mathrm{d}(\mathrm{O},\mathrm{H}) =$
$= \mathrm{d}(\mathrm{O},\mathrm{P}) + \mathrm{d}(\mathrm{O},\mathrm{Q}) = \mathrm{x}+\mathrm{y}$. Per il Lemma 2 H' è il punto di mezzo del segmento $[\mathrm{P}', \mathrm{Q}']$ e K' il simmetrico di O rispetto ad H'.
Pertanto $\mathrm{d}(\mathrm{O},\mathrm{K}') = \mathrm{g}(\mathrm{x}+\mathrm{y}) = \mathrm{d}(\mathrm{O},\mathrm{P}') + \mathrm{d}(\mathrm{O},\mathrm{Q}') = \mathrm{g}(\mathrm{x}) + \mathrm{g}(\mathrm{y})$.



CAPITOLO VI

LE ROTAZIONI

Introduzione
Le rotazioni di centro O possono essere definite in modi diversi.
Noi utilizzeremo il Teorema 7 del capitolo IV mettendo subito in risalto il ruolo delle simmetrie assiali.

***Definizione*: Si dice rotazione di centro O l'identità o il prodotto di due simmetrie assiali i cui assi passano per O.**
Scriveremo: $\boldsymbol{\rho = S_t \circ S_r}$

Proposizione 1
In una rotazione diversa dall'identità il centro O è il solo punto unito.

Dimostrazione
Che O sia unito è ovvio. Supponiamo che $P \neq O$ sia unito, cioè $\rho(P) = S_t \circ S_r(P) = P$.
Ne consegue $S_r(P) = S_t(P)$. Sono possibili due casi:

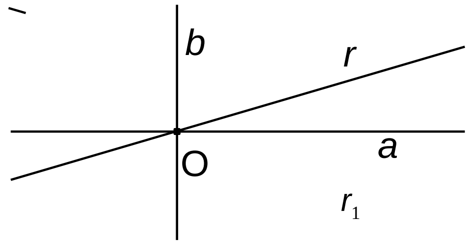
- $S_r(P) = S_t(P) = P$. Allora $r = t =$ retta OP, cioè $\rho =$ Id, assurdo.
- $S_r(P) = S_t(P) = P' \neq P$. Allora r e t sono assi di $[P, P']$ e quindi ancora coincidono ed è $\rho =$ Id, assurdo.

Corollario: Una rotazione non è mai una simmetria assiale.

Proposizione 2
In una rotazione non identica e diversa dalla simmetria centrale di centro O non esistono rette unite.

Dimostrazione
Sia $\rho = S_b \circ S_a$ con $a \neq b$ ed a e b incidenti non perpendicolari e supponiamo che $S_b \circ S_a(r) = r$. Risulta $S_a(r) = S_b(r)$. Due casi

- $S_a(r) = S_b(r) = r$. Allora r è perpendicolare sia ad a che a b, cioè $a // b$, assurdo. I casi $r = a$ oppure $r = b$ sono esclusi dalle ipotesi a $\neq$ b e a e b non perpendicolari.
- $S_a(r) = S_b(r) = r_1 \neq r$. Allora a e b sono bisettrici della coppia (r_1, r), cioè $a = b$ oppure $a \perp b$, assurdo. Questo secondo caso lo si legge in figura:



Il caso $r_1 // r$ porterebbe ad $a//b$, escluso dall'ipotesi a e b incidenti.

Teorema delle tre simmetrie

Il teorema che ora dimostriamo è un teorema di riduzione nel senso che illustra quando il prodotto di tre simmetrie assiali è una simmetria assiale.

Alla sua dimostrazione premettiamo un lemma che è una immediata conseguenza del Lemma 2 del Capitolo IV.

Lemma

Sia a_o una semiretta aperta o chiusa. Ogni isometria f tale che $f(a_o) = a_o$ o è l'identità o è la simmetria rispetto alla retta sostegno di a_o.

Teorema 1

Se *a*, *b*, *c*, sono tre rette distinte incidenti in un punto O esiste una retta *d* passante per O tale che: $S_c \circ S_b \circ S_a = S_d$.

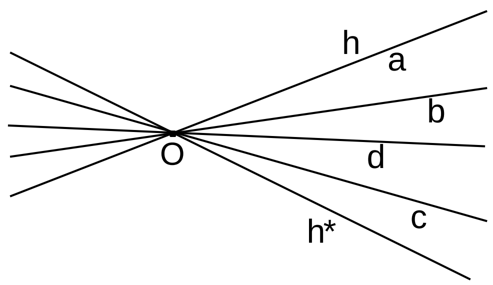
Dimostrazione

Sia *h* una delle due semirette di origine O, di sostegno *a*. L'isometria $S_c \circ S_b \circ S_a$ trasforma *h* in una semiretta h^* di origine O. Sia *d* la bisettrice della coppia di semirette (h, h^*).

S_d trasforma h^* in *h*; per cui $S_d \circ S_c \circ S_b \circ S_a(h) = h$. Per il lemma, $S_d \circ S_c \circ S_b \circ S_a = Id$ oppure $S_d \circ S_c \circ S_b \circ S_a = S_a$.

Da cui $S_c \circ S_b \circ S_a = S_d$ oppure $S_c \circ S_b = S_d$.

La seconda eventualità, però, è impossibile perché una rotazione non è mai una simmetria, dunque si ha la tesi.



Corollario: Il prodotto di tre simmetrie assiali con assi incidenti in uno stesso punto è involutorio.

Teorema 2

Le rotazioni intorno ad uno stesso punto O costituiscono un gruppo abeliano.

Dimostrazione

1) Il prodotto di due rotazioni di centro O è una rotazione di centro O.

$$(S_b \circ S_a) \circ (S_d \circ S_c) = (S_b \circ S_a \circ S_d) \circ S_c = S_e \circ S_c$$

2) E' associativo: ovvio.

3) L'identità funziona da elemento neutro.

4) L'inversa di una rotazione è una rotazione:

$$\rho = S_a \circ S_b;\ \rho^{-1} = (S_a \circ S_b)^{-1} = S_b^{-1} \circ S_a^{-1} = S_b \circ S_a$$

5) E' commutativo:

$$(S_a \circ S_b) \circ (S_c \circ S_d) = (S_a \circ S_b \circ S_c) \circ S_d = S_e \circ S_d = S_e^{-1} \circ S_d = (S_c \circ S_b \circ S_a) \circ S_d =$$
$$= S_c \circ (S_b \circ S_a \circ S_d) = S_c \circ S_f = S_c \circ S_f^{-1} = S_c \circ (S_d \circ S_a \circ S_b) = (S_c \circ S_d) \circ (S_a \circ S_b).$$

CAPITOLO VII

LE TRASLAZIONI

Introduzione
Le traslazioni vengono introdotte spesso mediante i vettori: sono le isometrie che possono essere completamente descritte mediante un vettore. E', indubbiamente, un metodo molto suggestivo, che, però, noi non seguiremo.
Anche nelle traslazioni entreranno in gioco le simmetrie assiali.

***Definizione*: Chiamiamo traslazione t il prodotto di due simmetrie assiali $\mathbf{S_a}$ ed $\mathbf{S_b}$, con *a* e *b* rette parallele.**

$$\mathbf{t = S_b \circ S_a}$$

PROPRIETÀ DELLE TRASLAZIONI

a) Una traslazione è una isometria: ovvio.

b) L'identità è una traslazione: $S_a \circ S_a = \mathrm{Id}$.

c) Una traslazione $t \neq \mathrm{Id}$ non ha punti uniti.

Dimostrazione
Supponiamo che O sia unito in t, cioè $S_b \circ S_a(O) = O$ e quindi $S_a(O) = S_b(O)$.
Abbiamo due casi:
1) $S_a(O) = S_b(O) = O$. Allora $O \in a$ e $O \in b$. Assurdo perché *a*//*b* e $a \neq b$.
2) $S_a(O) = S_b(O) = O_1 \neq O$. Allora *a* e *b* sono assi di $[O, O_1]$ e quindi coincidono, assurdo.

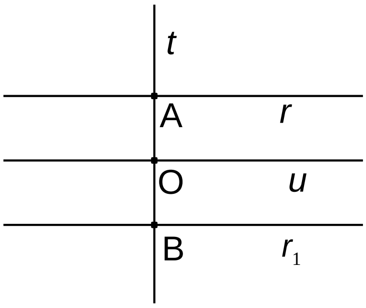
Corollario: Una traslazione non è mai una simmetria assiale.

d) Una traslazione non identica possiede un fascio di rette unite. E' il fascio delle rette perpendicolari alle due rette *a* e *b*.
Se una retta è perpendicolare sia ad *a* che a *b* è unita in S_a ed in S_b e quindi nel loro prodotto.

Nessun'altra retta è unita.

Dimostrazione
Per assurdo supponiamo che *r*, non perpendicolare ad *a* e a *b*, sia unita, cioè $S_b \circ S_a(r) = r$.
Abbiamo, quindi, due casi:
1) $S_a(r) = S_b(r) = r$. Allora o $a = b = r$, cioè $t = \mathrm{Id}$, oppure $r \perp a$ e $r \perp b$, assurdo.
2) $S_a(r) = S_b(r) = r_1 \neq r$. Se *r* ed r_1 sono incidenti allora *a* e *b* sono bisettrici di (r_1, r) e dunque coincidono, assurdo, oppure $a \perp b$, assurdo.
Se $r // r_1$ allora $a = b$ perché bisettrice della striscia (r, r_1), assurdo.

Il concetto di striscia è il solito.



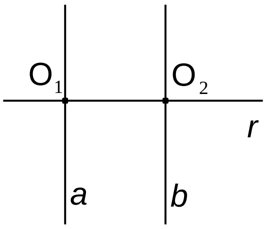
Sia *t* una perpendicolare comune ed *u* l'asse del segmento [A, B].
u è la bisettrice della striscia (r, r_1) ed $S_u(r) = r_1$.

Osserviamo che la direzione delle rette unite si dice ***direzione*** della traslazione.

Possiamo caratterizzare le traslazioni con le simmetrie centrali. Vale, infatti, il seguente

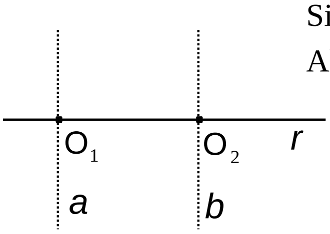
Teorema 1
Condizione necessaria e sufficiente perché una isometria sia una traslazione è che sia il prodotto di due simmetrie centrali.

Dimostrazione
Condizione necessaria: Sia $t = S_b \circ S_a$. Sia *r* una perpendicolare comune ad *a* ed a *b*.



Dobbiamo dimostrare che $t = S_{o_2} \circ S_{o_1}$.
Infatti $t = S_b \circ (S_r \circ S_r) \circ S_a = S_{o_2} \circ S_{o_1}$.

Condizione sufficiente: Vogliamo dimostrare che $S_{o_2} \circ S_{o_1} = S_b \circ S_a$ con *a*//*b*.

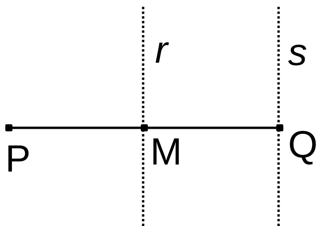


Sia $r = O_1 O_2$, $a \perp r$ in O_1 e $b \perp r$ in O_2.
Allora: $S_{o_2} \circ S_{o_1} = (S_b \circ S_r) \circ (S_r \circ S_a) = S_b \circ S_a$.

Corollario: t(*r*) // *r* per ogni retta *r*.

Teorema 2
Dati due punti P e Q esiste un'unica traslazione t che trasforma P in Q.

Dimostrazione
<u>Esistenza</u>: Basta prendere $t = S_s \circ S_r$.
<u>Unicità</u>: Siano t_1 e t_2 due tali traslazioni. Allora $t_2^{-1} \circ t_1(P) = P$, cioè per il punto c),
$t_2^{-1} \circ t_1 = \text{Id}$; da cui $t_1 = t_2$.



Osservazione: Nella dimostrazione della unicità abbiamo usato proprietà non ancora dimostrate (cioè il prodotto di due traslazioni è una traslazione e l'inversa di una traslazione è una traslazione). Lo faremo fra poco (Teorema 5).

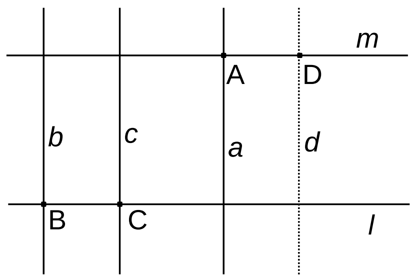
Il seguente è un teorema di riduzione, analogo a quello del Cap. VI e si dimostra allo stesso modo.

Teorema 3
Se *a*, *b*, *c*, sono tre rette parallele distinte, esiste una retta *d* parallela ad esse tale che $S_c \circ S_b \circ S_a = S_d$.

Una conseguenza di questo Teorema è che la rappresentazione di una traslazione t come prodotto di due simmetrie ad assi paralleli, non è unica.
Se, infatti, $t = S_b \circ S_a$ con *a*//*b*, presa *c*//*a* esiste *d*//*b* tale che $S_c \circ S_b \circ S_a = S_d$ cioè $S_b \circ S_a = S_c \circ S_d = t$.
Una osservazione analoga vale per le rotazioni (e in particolare per le simmetrie centrali).

Fondandoci sul Teorema precedente possiamo dimostrare un altro Teorema di riduzione riguardante le simmetrie centrali.

Teorema 4
Il prodotto di tre simmetrie centrali è una simmetria centrale: $S_C \circ S_B \circ S_A = S_D$.
Dimostrazione
Nel caso di coincidenze fra i punti A, B, C il teorema è ovvio. Nel caso A, B, C distinti, sia l=BC; da B e C mandiamo *b* e *c* perpendicolari ad *l*. Sia *m* la retta per A parallela ad *l* ed *a* la perpendicolare ad *m* in A. Si ha: $l \perp a$ e quindi *a*//*c*. Per il Teorema 3 esiste *d*//*a*, e quindi $d \perp l$ e $d \perp m$, tale che $S_c \circ S_b \circ S_a = S_d$.
Da cui $(S_c \circ S_l) \circ (S_l \circ S_b) \circ (S_a \circ S_m) = S_d \circ S_m$ cioè $S_C \circ S_B \circ S_A = S_D$.



Corollario: Il prodotto di tre simmetrie centrali è involutorio.

Possiamo ora dimostrare che:

Teorema 5
Le traslazioni costituiscono un gruppo abeliano.

Dimostrazione
1) Il prodotto di due traslazioni è una traslazione.
Siano $t_1 = S_B \circ S_A$ e $t_2 = S_D \circ S_C$.
Allora $t_2 \circ t_1 = (S_D \circ S_C) \circ (S_B \circ S_A) = (S_D \circ S_C \circ S_B) \circ S_A = S_E \circ S_A = t_3$.
2) Il prodotto è associativo: ovvio.

3) L'identità funziona da elemento neutro.
4) L'inversa di una traslazione è una traslazione.
Se $t = S_b \circ S_a$ con *a*//*b* allora $t^{-1} = S_a^{-1} \circ S_b^{-1} = S_a \circ S_b$.
5) Il prodotto è commutativo.

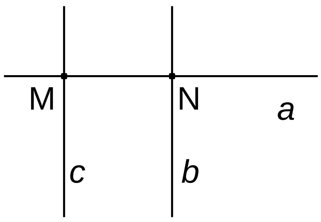
$$t_2 \circ t_1 = (S_D \circ S_C) \circ (S_B \circ S_A) = (S_D \circ S_C \circ S_B) \circ S_A = S_E \circ S_A = S_E^{-1} \circ S_A =$$
$$= (S_B \circ S_C \circ S_D) \circ S_A = S_B \circ (S_C \circ S_D \circ S_A) = S_B \circ S_F = S_B \circ S_F^{-1} =$$
$$= S_B (S_A \circ S_D \circ S_C) = (S_B \circ S_A) \circ (S_D \circ S_C) = t_1 \circ t_2 .$$

CAPITOLO VIII

LE GLISSOSIMMETRIE

INTRODUZIONE
Per completare il quadro delle isometrie piane ci resta solo da esaminare il prodotto di tre simmetrie assiali. Abbiamo già visto alcuni casi particolari (Teorema 1 del Cap. VI e Teorema 3 del Cap. VII). Ora studieremo il caso generale.

***Definizione*: Si dice glissosimmetria una isometria f che si possa rappresentare come prodotto di tre simmetrie assiali $\mathbf{S_a \circ S_b \circ S_c}$ con *b* e *c* perpendicolari alla retta *a*.**



Una glissosimmetria, quindi, è il prodotto di una traslazione per una simmetria il cui asse ha la direzione della traslazione.

Proprietà delle glissosimmetrie

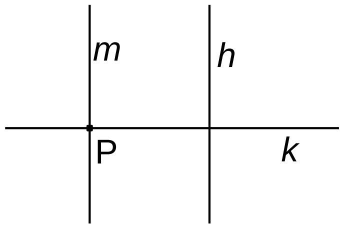
a) Un caso particolare si ha quando $b = c$. Allora $S_a \circ S_b \circ S_c = S_a \circ S_b \circ S_b = S_a$.
Questo significa che la simmetria assiale è una particolare glissosimmetria.

b) Una glissosimmetria può essere rappresentata in vari modi.

Sia $f = S_a \circ S_b \circ S_c$. Vale $S_a \circ S_b = S_b \circ S_a$; $S_a \circ S_c = S_c \circ S_a$ perché $a \perp b$ e $a \perp c$.
Allora $f = S_a \circ S_b \circ S_c = S_b \circ S_a \circ S_c = S_b \circ S_c \circ S_a$ cioè una glissosimmetria è anche il prodotto di una simmetria assiale per una traslazione. Indicando con *t* la traslazione $S_b \circ S_c$ si è dunque dimostrato che f = $S_a \circ$ *t* = *t* $\circ S_a$.

Inoltre: $f = S_a \circ S_b \circ S_c = S_N \circ S_c$ cioè f è il prodotto di una simmetria assiale per una simmetria centrale.
Si ha anche: $f = S_a \circ S_b \circ S_c = S_b \circ S_a \circ S_c = S_b \circ S_M$ cioè f è il prodotto di una simmetria centrale per una simmetria assiale.

Possiamo, quindi, concludere che ogni glissosimmetria si può rappresentare nella forma $S_N \circ S_c$ oppure $S_b \circ S_M$.
Vale anche la proprietà inversa.
Sia $f = S_P \circ S_h$. Da P mandiamo la retta *k* perpendicolare a *h* e sia *m* la perpendicolare a *k* in P. Si ha: $S_P \circ S_h = S_k \circ S_m \circ S_h$ che è una glissosimmetria.
Analogamente si ragiona per il prodotto $S_h \circ S_P$.



Possiamo, quindi, concludere che ogni isometria prodotto di una simmetria centrale e una simmetria assiale (o viceversa) è una glissosimmetria.

c) **Elementi uniti**
In riferimento alla definizione di glissosimmetria, la retta *a*, essendo unita in S_a, S_b, S_c è retta unita anche nel prodotto e viene detta *direttrice* della glissosimmetria. Essa è l'unica retta unita.

Dimostrazione
Supponiamo, infatti, che esista un'altra retta *h* unita: $S_a \circ S_b \circ S_c(h) = h$, cioè $S_a \circ t(h) = h$, con $h \neq a$.
Due casi: $t(h) = h$ o $t(h) = h' \neq h$.
1° caso: $t(h) = h$ implica che *h* abbia la direzione della traslazione t e quindi $h // a$.
$S_a(h) = h$ implica $a = h$ (non potendo essere $h \perp a$), assurdo.
2° caso: $t(h) = h' \neq h$. Allora $h // h'$ (per effetto della traslazione).
$S_a(h') = h$ implica che *a* è asse della striscia (h, h'), cioè $a // h$.
Siccome $t(a) = a$ allora anche $t(h) = h$, contro l'ipotesi.

Una glissosimmetria propria (cioè non ridotta ad una simmetria assiale) non ha punti uniti.

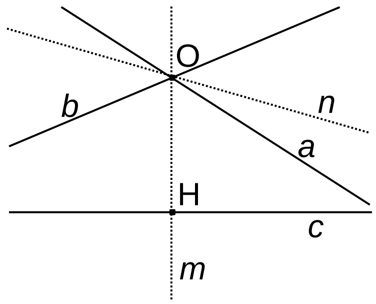
Dimostrazione
Supponiamo, infatti, che sia $S_a \circ S_b \circ S_c(P) = P$, cioè $S_a \circ t(P) = P$. Sia $t(P) = P'$.
Allora $PP' // a$ (per effetto della traslazione).
$S_a(P') = P$ e quindi *a* è l'asse del segmento $[P, P']$. Assurdo perché $PP' // a$.

Si può, allora concludere che le glissosimmetrie non sono traslazioni, né rotazioni, né, in generale, simmetrie.

d) L'inversa di una glissosimmetria è una glissosimmetria. Infatti:
$f = S_M \circ S_c$; $f^{-1} = (S_M \circ S_c)^{-1} = S_c^{-1} \circ S_M^{-1} = S_c \circ S_M$.

Teorema 1
Ogni isometria $f = S_a \circ S_b \circ S_c$ prodotto di tre simmetrie assiali è una glissosimmetria.

Dimostrazione
Il Teorema è vero se le tre rette appartengono allo stesso fascio proprio o improprio.
Supponiamo, quindi, che le tre rette non appartengano allo stesso fascio. Allora si verifica almeno una delle due: *b* incidente ad *a* oppure *b* incidente a *c*.
Nel primo caso sia $O = a \cap b$, *m* la perpendicolare da O a *c* ed $H = c \cap m$.
Le rette *a*, *b*, *m* sono concorrenti in O, quindi esiste una retta *n* tale che $S_a \circ S_b \circ S_m = S_n$ cioè $S_a \circ S_b = S_n \circ S_m$ da cui $f = S_a \circ S_b \circ S_c = S_n \circ S_m \circ S_c = S_n \circ S_H$, cioè f è una glissosimmetria.
Nel secondo caso, con ragionamento analogo, si dimostra che $S_c \circ S_b \circ S_a$ è una glissosimmetria, quindi lo è anche $(S_c \circ S_b \circ S_a)^{-1} = S_a \circ S_b \circ S_c = f$.



APPENDICE SULLE ISOMETRIE PARI E DISPARI

***Definizione*: Chiamiamo pari (risp. dispari) ogni isometria prodotto di un numero pari (risp. dispari) di simmetrie assiali.**

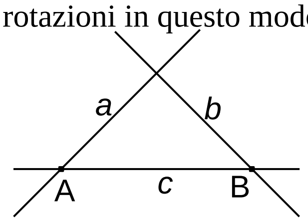
Teorema
Ogni isometria pari è il prodotto di due simmetrie assiali e quindi è una traslazione o una rotazione; ogni isometria dispari è una glissosimmetria.

Dimostrazione
Ogni isometria pari si presenta come prodotto di traslazioni o di rotazioni. Basta, quindi, esaminare il prodotto di:
1) due traslazioni;
2) due rotazioni;
3) una rotazione per una traslazione.

1) Il prodotto di due traslazioni è una traslazione.

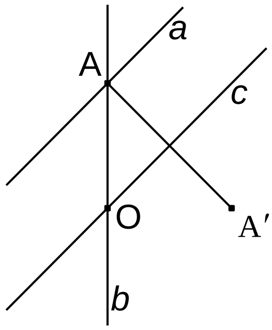
2) Siano R_A ed R_B due rotazioni di centri A e B rispettivamente.
Per il Teorema 1 del Cap. VI possiamo scrivere le due rotazioni in questo modo:

$R_A = S_a \circ S_c$; $R_B = S_c \circ S_b$.
Da cui $R_A \circ R_B = (S_a \circ S_c) \circ (S_c \circ S_b) = S_a \circ S_b$
che può essere una rotazione o una traslazione.



3) Sia $R_A = S_r \circ S_t$ una rotazione di centro A e $t: A \to A'$ una traslazione.

Consideriamo $[A, A']$ e sia *a* la retta per A perpendicolare ad $[A, A']$; sia *c* l'asse di $[A, A']$. Per il Teorema 1 del Cap. VI possiamo scrivere $R_A = S_a \circ S_b$ e quindi
$t \circ R_A = t \circ S_a \circ S_b = (S_c \circ S_a) \circ (S_a \circ S_b) = S_c \circ S_b$.
Poiché $b \not\parallel c$, $S_c \circ S_b$ è la rotazione di centro $O = c \cap b$.



Ogni isometria dispari è il prodotto di rotazioni o traslazioni per una simmetria assiale e quindi è il prodotto di tre simmetrie assiali, cioè una glissosimmetria.

Osservazione: Questo teorema sottolinea che per le isometrie è un carattere invariante il fatto di essere "pari" o "dispari" e giustifica la definizione data prima.

In base al teorema precedente è facile dedurre che le isometrie pari costituiscono gruppo, le isometrie dispari ovviamente no.

CAPITOLO IX

ANGOLI

Introduzione
Alla fine del secondo capitolo abbiamo illustrato le difficoltà che si incontrano nel definire il concetto di angolo. Abbiamo, anche, sviluppato buona parte della geometria elementare senza usare la nozione di angolo.
Volendola ora introdurre, abbiamo uno strumento efficace: le rotazioni.
E' mediante esse che definiamo il concetto di angolo.

***Definizione 1*: Per ogni $O \in \Pi$ si chiama angolo di vertice O ogni rotazione intorno ad O.**

Spesso un angolo di vertice O viene presentato come coppia ordinata di semirette (a_1, b_1) di origine O. Anche in questo caso è fondamentale il ricorso alle rotazioni.
Vediamo, anzitutto, il seguente teorema.

Teorema 1
Se a_1 e b_1 sono due semirette di origine O, esiste ed è unica la rotazione intorno ad O che porta a_1 su b_1.

Dimostrazione
<u>Esistenza</u>: è la rotazione $\rho = S_r \circ S_a$ dove S_a è la simmetria di asse *a*, retta sostegno di

a_1 ed S_r è la simmetria rispetto alla bisettrice di (a_1, b_1).

Unicità: siano ρ_1 e ρ_2 due tali rotazioni. Allora $\rho_2^{-1} \circ \rho_1(a_1) = a_1$.

Essendo impossibile $\rho_2^{-1} \circ \rho_1 = S_a$ resta $\rho_2^{-1} \circ \rho_1 = \mathrm{Id}$ cioè $\rho_1 = \rho_2$.

A questo punto appare ovvia la seguente

Definizione 2**: Per ogni coppia di semirette (a_1, b_1) di origine O si chiama angolo di questa coppia la rotazione intorno ad O che porta a_1 su b_1.**

Indichiamo questo angolo con il simbolo $\angle\, a_1 b_1$.

Osservazione 1

L'insieme degli angoli di vertice O non è altro che l'insieme delle rotazioni intorno ad O; si tratta, quindi, di un gruppo commutativo la cui legge di composizione viene, di solito, indicata additivamente.

Angoli di vertice diverso

Abbiamo definito angoli di vertice O. Possiamo, analogamente, definire angoli di vertice A, B ecc. Il problema che nasce è di poter confrontare angoli di vertice diverso.

Sono le traslazioni, con le proprietà espresse nel Capitolo VII che ci permettono questo confronto.

Fissato un punto $A \in \Pi$, vertice di un angolo $\angle\, a_1 b_1$ ed un punto A' esiste un'unica traslazione t tale che $t(A) = A'$; la coppia di semirette (a_1, b_1) si trasforma nella coppia di semirette (a_1', b_1') con $a_1 /\!/ a_1'$ e $b_1 /\!/ b_1'$.

Fissato un punto O arbitrario di Π è possibile, dunque, identificare ogni angolo di vertice A con quello corrispondente di vertice O.

Queste considerazioni giustificano la seguente definizione, dipendente solo in apparenza dall'origine O prescelta.

Definizione 3**: Diciamo angolo di una coppia di semirette (a_1, b_1) di origine A qualunque, l'angolo di vertice O delle semirette a_1' e b_1' di origine O e rispettivamente parallele ad a_1 e b_1.**

Angolo nullo ed angolo piatto

Indichiamo con ε l'angolo nullo, cioè l'elemento neutro del gruppo $\mathcal{A}$ degli angoli di vertice O, e con $\tilde{\omega}$ l'angolo associato alla simmetria centrale di centro O.

Per ogni coppia di semirette (a_1, b_1) aventi la stessa origine si hanno le equivalenze:

$$(a_1, b_1) = \varepsilon \Leftrightarrow a_1 = b_1$$

$$(a_1, b_1) = \tilde{\omega} \Leftrightarrow a_1 \text{ e } b_1 \text{ sono opposte}$$

Siccome la simmetria centrale è involutoria si ha $2\tilde{\omega} = \tilde{\omega} + \tilde{\omega} = \varepsilon$ o, anche, $\tilde{\omega} = -\tilde{\omega}$.

L'angolo $\tilde{\omega}$ è l'angolo piatto di vertice O.[1]

[1] Per gli sviluppi di questo capitolo si veda [2], p. 95-100.

Bibliografia

[1] AA.VV., 1977, *Guida al progetto d'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie superiori proposto da G. Prodi*, G. D'Anna, Messina-Firenze.
[2] CHOQUET G., 1967, *L'insegnamento della geometria*, Feltrinelli, Milano.
[3] FERRARI M., 1989-90, *La trattazione assiomatica di G. Choquet-commenti, Appunti per il corso di Matematiche Complementari*, Dipartimento di Matematica Università di Pavia.
[4] PRODI G., 1981, *Matematica come scoperta per il biennio delle scuole medie superiori*, Vol. 1, G. D'Anna, Messina-Firenze.
[5] PRODI G., 1977, *Matematica come scoperta per il biennio delle scuole medie superiori*, Vol. 2, G. D'Anna, Messina-Firenze.

INDICE

CAPITOLO I ASSIOMI DI INCIDENZA 1

La proiezione obliqua 2
Sistemi di assi 3

CAPITOLO II ASSIOMI DI ORDINE 4

Nota sul concetto di angolo 6

CAPITOLO III ASSIOMA DI STRUTTURA METRICA 7

Proprietà delle isometrie 9

CAPITOLO IV ASSIOMA DEL PIEGAMENTO 11

Simmetria rispetto a una retta 11
La relazione di perpendicolarità 13
Asse di un segmento 14
Bisettrici e bandiere 16

CAPITOLO V LA SIMMETRIA CENTRALE 18

Teorema di Talete 19

CAPITOLO VI Le rotazioni 21

Teorema delle tre simmetrie 22

CAPITOLO VII Le traslazioni 23

Proprietà delle traslazioni 23

CAPITOLO VIII Le glissosimmetrie 26

Proprietà delle glissosimmetrie 26
Appendice sulle isometrie pari e dispari 28

CAPITOLO IX Angoli 29

Angoli di vertice diverso 30
Angolo nullo ed angolo piatto 30