L'ASSIOMATICA DELLA GEOMETRIA DEL PIANO
NEL PROGETTO "MATEMATICA COME SCOPERTA" DI G. PRODI

(Selezione di parti teoriche ed esercizi dai **Vol. 1 e 2, Ed. G. D'Anna, Messina-Firenze, 1987)**

Gli assiomi della distanza, della retta, del piano

Il punto di partenza per lo studio delle isometrie è l'introduzione del concetto di **distanza**.
Il riferimento intuitivo per il concetto di distanza tra due punti è quello della lunghezza minima dei cammini che li congiungono. Tale nozione di distanza si applica a tante situazioni diverse, anche con riferimenti diversi da quello usuale di segmento, basti pensare alla distanza tra due città o al minimo cammino su una sfera come un arco del cerchio massimo, ecc. Se si vuole trasferire questo discorso alla geometria occorre definire la distanza tra due punti in un insieme S ed assicurarne l'esistenza. Ciò è fornito dal seguente assioma:

A1 (Assioma) Per tutte le coppie di punti P,Q dell'insieme S è assegnato un numero reale non negativo, che si dice **distanza** di P da Q e si indica con d (P,Q).

La distanza ha le seguenti proprietà:

I) se i punti P e Q sono distinti è $d(P,Q) > 0$, se coincidono è $d(P,Q) = 0$.
II) $d(P,Q) = d(Q,P)$ (proprietà di **simmetria**)
III) $d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q)$ (**disuguaglianza triangolare**)

Osserviamo che la distanza è definita per tutte le coppie (P,Q) di S e quindi si può considerare come una funzione definita nel prodotto cartesiano S x S a valori reali.

Un insieme S in cui sia assegnata una distanza si dice **spazio**, punto è un suo elemento. L'obiettivo di queste pagine è lo studio di uno spazio particolare, molto ricco di proprietà: il **piano**.
Sulla base della sola definizione di distanza si possono introdurre alcuni importanti sottoinsiemi del piano: cerchio, disco, retta.

Definizione. Dato un punto O ed un numero positivo r, si dice **cerchio** di centro O e raggio r l'insieme dei punti P del piano tali che $d(O,P) = r$.
Si dice **disco** di centro O e raggio r, l'insieme dei punti P del piano tali che $d(O,P) \leq r$.

D'ora in poi, per indicare la distanza fra due punti A, B del piano, useremo la notazione più breve: $\overline{AB}$ anziché d (A,B).

A2 (Assioma) Per due punti distinti passa una ed una sola retta.

Due rette si dicono **incidenti** se hanno esattamente un punto in comune, altrimenti si dicono **parallele**.
Dunque due rette sono parallele se non hanno alcun punto in comune o se ne hanno più di uno.
Ma se hanno due o più punti in comune, esse coincidono per l'assioma A2, perciò un retta risulta parallela a se stessa.

Il seguente assioma ci dice che nessuna retta può esaurire tutto il piano.

A3 (Assioma)	Nel piano ci sono almeno tre punti non allineati.

Si può ora pensare di introdurre un ordinamento (totale) sulle rette. Intuitivamente, una retta può essere percorsa in due sensi senza ritornare mai ad un punto per cui si è già passati. Fissato un senso di percorrenza, se si incontra prima il punto P e poi il punto Q, si dice che "P precede Q" oppure "Q segue P" e si scrive P < Q oppure Q > P.
Se si inverte il senso di percorrenza della retta, ogni relazione di ordine viene sostituita da quella opposta.

Tutto ciò è precisato nell'assioma che segue e che collega l'ordinamento totale con la distanza.

A4 (Assioma)	Su ogni retta esistono due **relazioni di ordine**, fra loro opposte, con la seguente proprietà: se è A < B < C allora è $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$. Viceversa, se dati tre punti A,B,C vale la citata uguaglianza, allora il punto B è allineato con A e C e si ha A < B < C, oppure C < B < A.

Dall'assioma A4 discendono le seguenti **definizioni**:

- una retta su cui è stata fissata una relazione d'ordine si dice **retta orientata**;
- fissati su una retta $\mathcal{R}$, una relazione d'ordine ed un punto O, l'insieme dei punti P tali che P > O si dice **semiretta** di origine O. Anche l'insieme dei punti P per cui è P < O è una semiretta, detta semiretta opposta ;
- si dice che il punto B della retta $\mathcal{R}$ sta fra A e C se si ha A < B < C oppure C < B < A.
- l'insieme costituito dai punti A e C e da quelli fra loro si dice **segmento** AC. I punti del segmento diversi dagli estremi si dicono punti interni al segmento;
- dati due punti A e C, la distanza AC si chiama anche **misura** o **lunghezza** del segmento AC.

A5 (Assioma)	Fissata una semiretta $\mathcal{U}$ di origine O e fissato un numero reale positivo x esiste sulla semiretta un unico punto P tale che $\overline{OP}$ = x.

Questo assioma stabilisce una corrispondenza biunivoca fra i numeri reali positivi e i punti della semiretta $\mathcal{U}$. Si può completare la corrispondenza associando ai numeri reali negativi i punti della semiretta opposta aventi da O la distanza uguale al valore assoluto del numero e facendo corrispondere allo zero il punto O.
In questo modo si ottiene una corrispondenza biunivoca fra i punti di una retta e i numeri reali.
Per questa ragione l'insieme **R** è chiamato "retta reale".

Il numero x si dice **coordinata** di P. Si dice che sulla retta di $\mathcal{U}$ abbiamo stabilito un sistema di coordinate con origine O e avente come semiretta positiva $\mathcal{U}$.

Un'altra definizione importante è la seguente:
Dato il segmento AB esiste sulla semiretta con origine A contenente B un punto P tale che $\overline{AP}$ = ½ $\overline{AB}$. Tale punto è il solo equidistante da A e da B ed è chiamato **punto di mezzo** del segmento AB .

Esercizi

1. Dimostrare che: data una retta $\Re$ ed un punto di essa M, esiste una retta diversa da $\Re$ che passa per M. (N. 3, pag. 177)

2. In un cerchio ogni corda che non sia un diametro ha lunghezza inferiore al diametro. (N. 1, pag.184)

3. Dato un cerchio ed un punto P ad esso esterno (cioè avente dal centro distanza superiore al raggio), trovare il punto del cerchio più vicino a P. (N. 2, pag.185)

La nostra intuizione ci dice che una retta divide il piano in due distinte regioni.
Pertanto risulta spontaneo enunciare il seguente assioma:

A6 (Assioma)	Data nel piano una retta $\mathcal{R}$, l'insieme complementare di $\mathcal{R}$ risulta suddiviso in due regioni, dette **semipiani**, con le seguenti proprietà: • il segmento che congiunge due punti di uno stesso semipiano non taglia la retta $\mathcal{R}$; • il segmento che congiunge due punti di semipiani distinti taglia la retta $\mathcal{R}$.

Indicati con $\mathcal{A}_1$ ed $\mathcal{A}_2$ i due semipiani, il piano può essere rappresentato come unione di tre insiemi disgiunti: $\mathcal{R} \cup \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$.
La retta $\mathcal{R}$ è il **bordo** o **frontiera** di ciascuno dei due semipiani.
Si dice poi che i due semipiani sono **opposti** fra loro.

Diamo alcune importanti definizioni:

Un insieme K del piano si dice **convesso** se, presi due suoi punti P, Q, il segmento PQ che li congiunge è tutto contenuto in K.

Osserviamo che una retta, una semiretta, un segmento sono insiemi convessi.

Si dimostrano facilmente i seguenti **teoremi**:

1. un semipiano è un insieme convesso;
2. l'intersezione di due insiemi convessi è un insieme convesso.

In generale l'unione di due insiemi convessi non è un insieme convesso: ad esempio l'unione di due semipiani generati da rette incidenti.

Definizione. Si dice **angolo** una coppia di semirette $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ aventi la stessa origine.
L'angolo può essere indicato con ($\mathcal{R}$,$\mathcal{S}$) e le semirette in questione si dicono **lati** dell'angolo.

Se le due semirette $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ non sono allineate, all'angolo viene associato un insieme convesso detto **regione angolare** che usualmente è esso stesso chiamato angolo.
Tale regione è determinata nel seguente modo: consideriamo il semipiano individuato da $\mathcal{R}$ che contiene la semiretta $\mathcal{S}$.
Allo stesso modo consideriamo il semipiano individuato da $\mathcal{S}$ che contiene la semiretta $\mathcal{R}$.
Un semipiano è un insieme convesso e l'intersezione di insiemi convessi è un insieme convesso.
Dunque l'intersezione di questi due semipiani è l'insieme convesso che associamo all'angolo ($\mathcal{R}$,$\mathcal{S}$).

Se le due semirette $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ sono semirette opposte di una medesima retta, l'angolo si dice **piatto**.

Chiamiamo **triangolo** una terna di punti non allineati A,B,C. Spesso con il termine "triangolo" ci si riferisce anche ai seguenti significati:

- i tre segmenti [A,B], [B,C], [C,A] (**lati** del triangolo);
- la **regione triangolare** individuata dall'intersezione delle tre regioni angolari in A, B, C;
- la regione individuata dall'intersezione dei tre semipiani (ciascuno individuato dalla retta passante per due dei tre punti e contenente il terzo)

Se abbiamo un insieme finito di punti, ad esempio A, B, C, D, E, F: l'insieme ordinato dei segmenti [A,B], [B,C], [C,D], [D,E], [E,F] si dice **spezzata** o **poligonale** di **vertici** A, B, C, D, E, F e **lati** [A,B], [B,C], [C,D], [D,E], [E,F].
Se l'ultimo dei vertici coincide con il primo , si dice che la spezzata è **chiusa**.

Una quaterna di punti A,B,C,D (in ordine) si dice **quadrangolo** o **quadrilatero**.

Un quadrilatero è **convesso** quando la retta che congiunge due qualsiasi vertici consecutivi della spezzata chiusa A, B, C, D lascia gli altri vertici in uno stesso semipiano.

È utile enunciare alcuni **teoremi** sui triangoli e sui quadrilateri:

I) Dato un triangolo, una retta che non passa per alcuno dei suoi vertici, o non taglia alcun lato o ne taglia esattamente due [1].

I segmenti ottenuti congiungendo le coppie di vertici non consecutivi di un quadrangolo si dicono **diagonali**.

II) Se le diagonali di un quadrilatero si tagliano in un punto interno ad entrambe, il quadrilatero è convesso.

[1] Questo teorema è equivalente alla formulazione di Pasch, cioè l'assioma II4 di Hilbert.

Le isometrie

Definizione. Si dice **isometria** (o anche **congruenza**) un'applicazione f biunivoca del piano in sé che conserva le distanze, cioè tale che per ogni coppia di punti P, Q, con f(P) = P', f(Q) = Q', valga la relazione $\overline{P'Q'} = \overline{PQ}$.

Possiamo ora enunciare alcune **proprietà** delle isometrie del piano:

I) Un'isometria trasforma un cerchio in un cerchio, un disco in un disco.

Sia f un'isometria e sia f^{-1} l'applicazione inversa di f. E' evidente che anche f^{-1} è un'isometria.
Sia K un cerchio di centro O e raggio r; sia O' il trasformato di O e sia K' il cerchio con centro O' e raggio r.
Sia P un punto qualsiasi di K e sia P' il suo trasformato. Essendo $\overline{OP}$ = r, si ha $\overline{O'P'}$ = r, quindi il punto P' sta sul cerchio K'.
Ma questo non basta, perché l'immagine di K potrebbe non esaurire K'. Consideriamo allora f^{-1}: essa trasforma O' in O e un qualsiasi punto di Q di K', cioè tale che $\overline{O'Q}$ = r, in un punto Q' tale che $\overline{OQ'}$ = r, ossia in un punto di K. Dunque l'immagine di K coincide con K'.

Si ragiona in modo analogo per il disco.

II) Un'isometria trasforma una retta in una retta.

Consideriamo tre punti allineati A,B,C e supponiamo che B stia tra A e C. Allora per l'assioma A4 si ha $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$.

Poniamo A → A', B → B', C → C'. Per la proprietà di isometria, si ha

$\overline{A'C'} = \overline{A'B'} + \overline{B'C'}$ ma, sempre per l'assioma A4, questa relazione ci dice che i punti A', B', C' sono allineati e che B' sta tra A' e C'. L'isometria inversa, per lo stesso motivo, trasforma i punti allineati A', B', C' tali che $\overline{A'C'} = \overline{A'B'} + \overline{B'C'}$ nei punti A, B, C, con B tra A e C.

Quindi un'isometria trasforma segmenti in segmenti.

Ora dobbiamo dimostrare che una isometria trasforma rette in rette.

Sia $\mathcal{R}$ una retta e siano A, B due punti distinti di $\mathcal{R}$. Consideriamo la retta immagine $\mathcal{R}'$ individuata dai punti corrispondenti A' e B'. Per quanto visto, l'isometria trasforma un punto P allineato con A e B in un punto allineato con A', B', cioè in punto della retta $\mathcal{R}'$.
Poiché l'isometria inversa porta i punti di $\mathcal{R}'$ in punti di $\mathcal{R}$, l'immagine di $\mathcal{R}$ è tutta $\mathcal{R}'$.

Le due proposizioni I) e II) descrivono semplicemente alcune proprietà delle isometrie.

Non siamo ancora in grado di affermare che esistono delle isometrie diverse dall'identità.

Esercizi

1. Una isometria che lascia fissi due punti A, B, lascia fissi tutti i punti della retta AB. (N. 2, pag. 191)

2. Una isometria trasforma una semiretta in una semiretta. (N. 1, pag. 191)

3. Un'isometria che lascia fissi tre punti A, B, C non allineati è l'identità. (N. 3, pag. 191)

4. Un'isometria che scambia fra loro due punti A, B ha anche un punto fisso (almeno). (N. 4, pag. 191)

La simmetria assiale

Definizione. Data nel piano una retta $\mathcal{R}$ si dice **simmetria assiale** (o ribaltamento) **di asse** $\mathcal{R}$ un'isometria che ha queste proprietà:

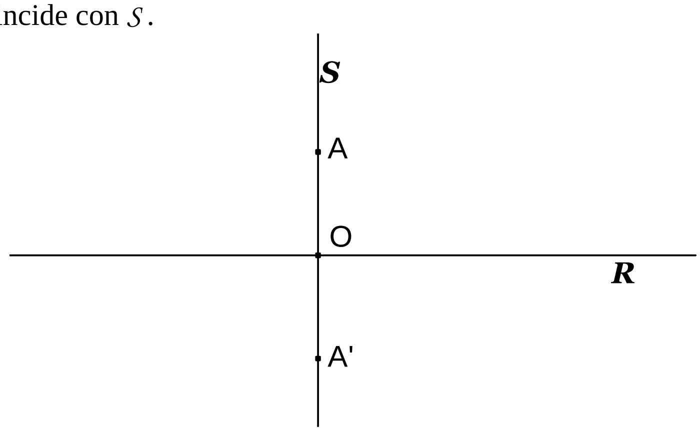
- lascia fissi tutti i punti di $\mathcal{R}$ e porta ciascuno dei due semipiani generati da $\mathcal{R}$ nell'altro
- è involutoria (cioè applicata due volte ci dà l'identità).

Esercizi

1. Rette incidenti che si corrispondono in una simmetria assiale si incontrano sull'asse. (N. 3, pag. 272)
2. Una simmetria assiale trasforma ogni retta $\mathcal{S}$ parallela all'asse in una retta che: a) è parallela ad $\mathcal{S}$ b) è parallela all'asse. (N. 4, pag. 272)

Valgono le seguenti importanti **proprietà**:

- sia $S_{\mathcal{R}}$ la simmetria di asse $\mathcal{R}$ ed A un punto che non appartiene alla retta $\mathcal{R}$. A → A' e per il carattere involutorio A'→ A. Sia $\mathcal{S}$ la retta passante per A e per A'. Essa viene trasformata in una retta passante per A' e per A. Poiché c'è un'unica retta che passa per due punti, la retta $\mathcal{S}'$ trasformata di $\mathcal{S}$ coincide con $\mathcal{S}$.



- il fatto che $\mathcal{S}$ viene trasformata in sé dalla simmetria non significa che i singoli punti di $\mathcal{S}$ rimangano fissi: l'unico punto fisso è il punto di incontro O della retta $\mathcal{S}$ con la retta $\mathcal{R}$.

La retta $\mathcal{S}$ si spezza in due semirette con origine O: ciascuna di esse viene mutata nell'altra dalla simmetria.

Rette ortogonali

Possiamo porre la seguente

Definizione: Una retta $\mathcal{S}$ si dice **perpendicolare** (o ortogonale) ad $\mathcal{R}$ se è diversa da $\mathcal{R}$ e se viene trasformata in sé dalla simmetria di asse $\mathcal{R}$.

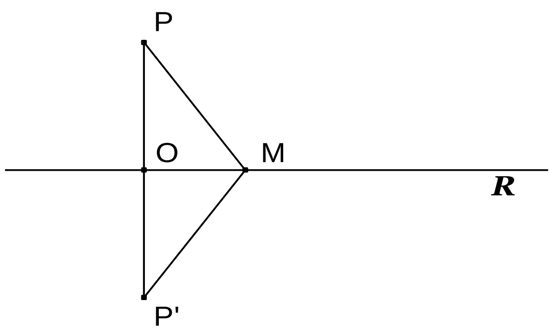
E' importante precisare che $\mathcal{S}$ sia diversa da $\mathcal{R}$ poiché anche $\mathcal{R}$ è trasformata in sé dalla simmetria di asse $\mathcal{R}$.

Fino a questo momento abbiamo descritto le simmetrie assiali ma non abbiamo affermato che esistono . Dobbiamo pertanto inserire il seguente assioma:

A7 (Assioma)	Data una qualunque retta $\mathcal{R}$ del piano, esiste una ed una sola simmetria assiale di asse $\mathcal{R}$.

E' interessante il seguente **problema**: data una retta $\mathcal{R}$ e un punto P, trovare un punto di $\mathcal{R}$ che sia a distanza minima da P.
Si presentano due casi:

- se il punto P è su $\mathcal{R}$ allora la soluzione è banale.
- se P è fuori di $\mathcal{R}$ allora sdoppiamo la figura con una simmetria di asse $\mathcal{R}$.



Consideriamo un punto qualsiasi M di $\mathcal{R}$. Il punto P ha come corrispondente un punto P' nel semipiano opposto; il punto M corrisponde a sé stesso.
Per la proprietà di isometria si ha $\overline{PM} = \overline{P'M}$. Dunque $\overline{PM}$ = ½ ($\overline{PM}$ + $\overline{P'M}$). Si tratta di prendere M in modo che questa espressione assuma il valore minimo possibile.
Questo si ottiene congiungendo P con P' mediante un segmento e considerando il punto O in cui questo segmento taglia la retta $\mathcal{R}$. Ricordiamo che P e P' si trovano in semipiani opposti rispetto alla retta $\mathcal{R}$. Se M è un punto di $\mathcal{R}$ diverso da O, si ha per la disuguaglianza triangolare

$$\overline{PP'} < \overline{PM} + \overline{P'M}$$

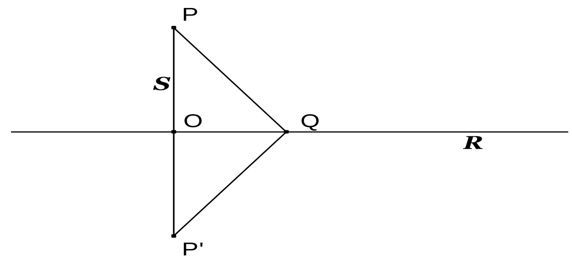
Perciò, moltiplicando per ½ ambo i membri e osservando che $\overline{PO}$ = ½ $\overline{PP'}$, si ha

$$\overline{PO} < ½ (\overline{PM} + \overline{P'M}) = \overline{PM} .$$

Dunque c'è **un unico punto** di $\mathcal{R}$ a distanza minima da P ed è quello in cui la perpendicolare mandata da P taglia la retta $\mathcal{R}$.
Il punto O si dice **proiezione ortogonale** di P.

Dimostriamo ora un teorema che ci dice che la relazione di ortogonalità è simmetrica:

Se la retta $\mathcal{S}$ è ortogonale alla retta $\mathcal{R}$, la retta $\mathcal{R}$ è ortogonale alla retta $\mathcal{S}$.



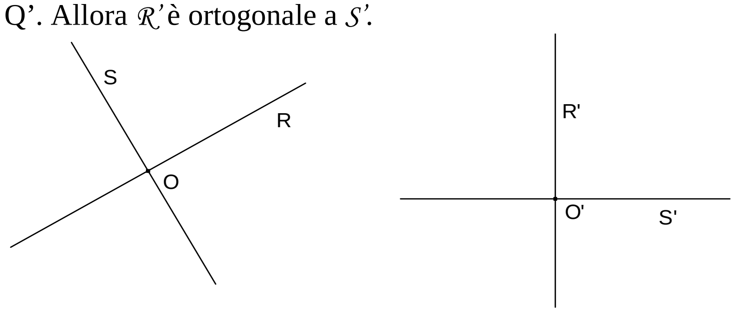
Indichiamo con O il punto di incontro delle due rette. Basta far vedere che, preso un punto Q di $\mathcal{R}$ diverso da O, il punto O è fra tutti i punti di $\mathcal{S}$ quello più vicino a Q: infatti questo basta ad assicurarci che O è la proiezione di Q su $\mathcal{S}$ e perciò $\mathcal{R}$ è ortogonale ad $\mathcal{S}$.
Dimostriamo che un qualsiasi punto P di $\mathcal{S}$ diverso da O non può essere il punto di minima distanza da Q. Infatti, preso un punto P di $\mathcal{S}$ diverso da O, il punto P' simmetrico di P appartiene ad $\mathcal{S}$, essendo $\mathcal{S}$ ortogonale ad $\mathcal{R}$. Essendo la simmetria di asse $\mathcal{R}$ un'isometria, si ha $\overline{PQ} = \overline{P'Q}$, cioè i punti P, P' di $\mathcal{S}$ hanno la stessa distanza da Q; ma allora il punto P non può essere il punto di minima distanza da Q perché il punto di minima distanza è unico. Dunque il punto di minima distanza non può essere che O.

Dopo questo teorema possiamo usare senza possibilità di equivoco l'espressione: le rette $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ sono fra loro ortogonali.

L'assioma A7 ci ha permesso di mandare una perpendicolare ad una retta $\mathcal{R}$ da un punto P esterno. Non siamo ancora in grado di mandare una perpendicolare ad $\mathcal{R}$ da un punto P di $\mathcal{R}$. E' utile allora introdurre il seguente assioma[2]:

A8 (Assioma)	Data una retta $\mathcal{R}$ ed un punto P di essa, esiste un'unica retta $\mathcal{S}$ perpendicolare ad $\mathcal{R}$ e passante per P.

E' semplice dimostrare che: Una qualunque isometria trasforma due rette $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ fra loro ortogonali in rette $\mathcal{R}'$, $\mathcal{S}'$ fra loro ortogonali.
Infatti, sappiamo che un'isometria trasforma rette in rette. Sia O il punto di incontro di $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{S}$, e sia O' il corrispondente di O, che sarà il punto di incontro di $\mathcal{R}'$ ed $\mathcal{S}'$.
Sia Q un punto di $\mathcal{R}$ diverso da O e Q' il suo corrispondente in $\mathcal{R}'$. Di tutti i punti di $\mathcal{S}$, O è quello a minima distanza da Q. Poiché l'isometria conserva le distanze, di tutti i punti di $\mathcal{S}'$, O' è quello di minima distanza da Q'. Allora $\mathcal{R}'$ è ortogonale a $\mathcal{S}'$.



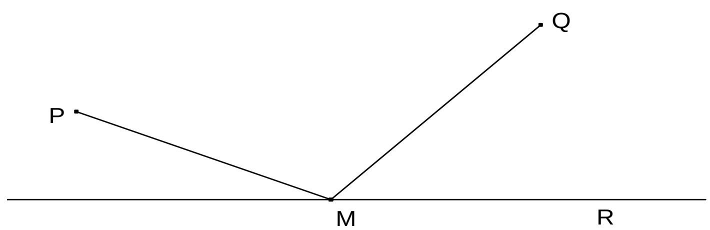
[2] In effetti la proposizione è dimostrabile, ma poiché la dimostrazione risulta complessa, è preferibile collocare la proposizione tra gli assiomi..

Possiamo dare la seguente

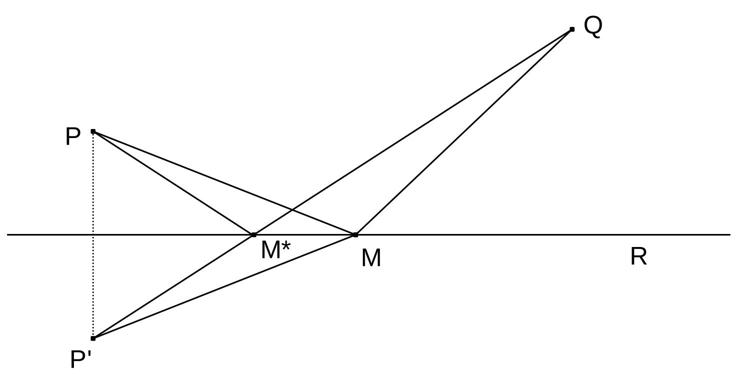
Definizione: L’angolo formato da due semirette con la stessa origine e fra loro ortogonali si dice **retto**.

Dunque un’isometria conserva gli angoli retti.

Problema di Erone: dati due punti P, Q che si trovano dalla stessa parte rispetto alla retta $\mathcal{R}$, trovare il percorso più breve che congiunge P con Q toccando la retta $\mathcal{R}$.
(Questo problema può essere formulato in modo concreto, ad esempio come segue: $\mathcal{R}$ è un fiume che attraversa la pianura; un cacciatore si trova in P e deve ritornare a casa in Q, ma prima deve attingere l’acqua al fiume.)
Intuitivamente il cammino dovrà essere rettilineo fino ad un certo punto M di $\mathcal{R}$ e poi di nuovo rettilineo da M a Q. Il problema è determinare M su $\mathcal{R}$ in modo tale che $\overline{PM} + \overline{PQ}$ sia minima.



Consideriamo una simmetria assiale di asse $\mathcal{R}$ e trasformiamo il segmento PM. Sia P’ il simmetrico di P.



Essendo $\overline{PM} = \overline{P'M}$, si ha $\overline{PM} + \overline{MQ} = \overline{P'M} + \overline{MQ}$.
Questo valore dovrà essere minimo. Il minimo viene raggiunto quando il percorso da P’ a Q è rettilineo. Poiché P’ e Q stanno da parti opposte rispetto alla retta $\mathcal{R}$, il segmento [P’,Q] taglia la retta $\mathcal{R}$ in un punto M^* che è il punto cercato.

Esercizi

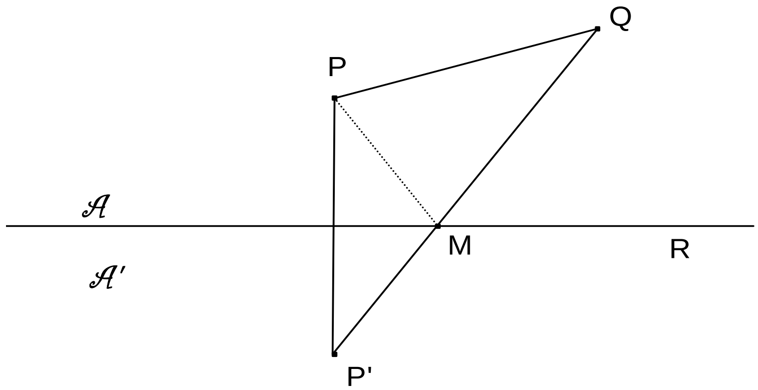
1. Dato l’asse di simmetria R e date due coppie di punti corrispondenti A, A’; B, B’ costruire, servendosi solo della riga non graduata, il corrispondente di un punto qualsiasi P. Ci si può ridurre ad una sola coppia di punti corrispondenti? (N. 1, pag. 197)

2. Assegnate due coppie di punti corrispondenti in una simmetria assiale, si costruisca l’asse usando solo la riga non graduata. E’ sempre possibile costruire l’asse? (N. 14, pag. 273)

Asse di un segmento

Prima di parlare di asse di un segmento e delle relazioni fra ortogonalità e parallelismo, confrontiamo tra loro le distanze che un punto del piano ha da due punti fissati.

Sia $\mathcal{R}$ una retta e siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ i due semipiani che essa genera. Sia P un punto di $\mathcal{A}$ e P' il suo simmetrico rispetto alla retta $\mathcal{R}$. Allora per tutti i punti Q del semipiano $\mathcal{A}$ si ha $\overline{PQ} < \overline{P'Q}$.



Cominciamo osservando che Q e P' stanno in semipiani opposti dal momento che Q sta nello stesso semipiano di P. Allora il segmento P'Q taglia la retta $\mathcal{R}$ in un punto M.
Per la disuguaglianza triangolare applicata al triangolo PQM si ha
$\overline{PQ} < \overline{PM} + \overline{MQ}$.
Non può valere il segno di uguaglianza poiché il punto M appartiene alla retta $\mathcal{R}$ e perciò non può stare sul segmento PQ.
Poiché la simmetria assiale conserva le distanze, si ha $\overline{PM} = \overline{P'M}$. Sostituendo $\overline{PM}$ con $\overline{P'M}$ nella disuguaglianza precedente si trova
$\overline{PQ} < \overline{P'M} + \overline{MQ}$, ma si ha $\overline{P'M} + \overline{MQ} = \overline{P'Q}$. Da cui la disuguaglianza cercata.

Dunque si conclude che i punti del semipiano $\mathcal{A}$ sono più vicini a P che a P'; i punti del semipiano $\mathcal{A}'$ sono più vicini a P' che a P; i punti di $\mathcal{R}$ hanno la stessa distanza da P e da P'.

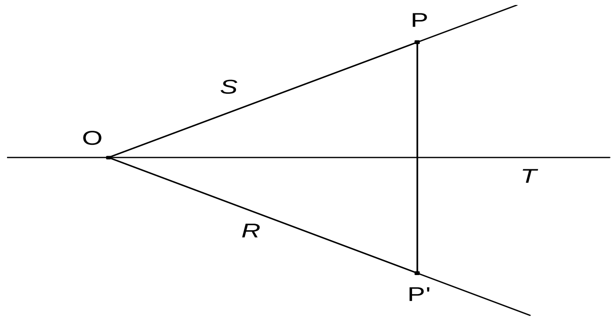
***Definizione**:*

Dati due punti distinti P e P' si chiama **asse** del segmento PP' l'asse dell'unica simmetria che scambia P con P', cioè la retta perpendicolare al segmento PP' nel suo punto di mezzo .

Dal teorema dimostrato si deduce che l'asse del segmento PP' è l'insieme formato da tutti e soli i punti che hanno uguale distanza da P e da P'.

Siamo ora in grado di risolvere il seguente **problema**: trovare una simmetria assiale che scambia fra loro i lati di un angolo.

Siano $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{S}$ due semirette distinte e non allineate con origine comune O. Prendiamo su $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{S}$ due punti P e P' rispettivamente, distinti da O e tali che $\overline{OP} = \overline{OP'}$. Sia $\mathcal{T}$ l'asse del segmento PP': il punto O deve stare su $\mathcal{T}$ perché $\mathcal{T}$ è il luogo dei punti equidistanti da P e P'. La simmetria con asse $\mathcal{T}$ scambia tra loro i punti P e P' e lascia fermo il punto O; allora essa scambia fra loro le semirette $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{S}$.



Se indichiamo con $\mathcal{T}^*$ la semiretta di $\mathcal{T}$ con origine in O contenuta nell'angolo ($\mathcal{R}$,$\mathcal{S}$), tale angolo risulta allora suddiviso in due angoli fra loro isometrici ($\mathcal{R}$, $\mathcal{T}^*$) e ($\mathcal{T}^*$,$\mathcal{S}$). Il termine **bisettrice** indica sia la retta $\mathcal{T}$ che la semiretta $\mathcal{T}^*$.
Nel caso che $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{S}$ siano due semirette opposte di una stessa retta $\mathcal{Z}$, allora è evidente che la retta per O e perpendicolare alla retta $\mathcal{Z}$ suddivide ciascuno dei due semipiani generati da $\mathcal{Z}$ in due angoli retti fra loro simmetrici.

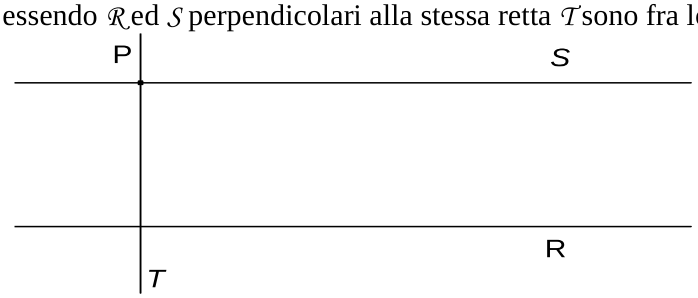
Si può ora enunciare un **teorema** che collega la perpendicolarità con il parallelismo:

<u>Due rette $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{S}$ ortogonali ad una stessa retta $\mathcal{T}$ sono fra loro parallele.</u>

Supponiamo che $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{S}$ abbiano un punto P in comune. Se il punto P appartiene alla retta $\mathcal{T}$, $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{S}$ devono coincidere per l'assioma A8.
Se le rette $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ hanno in comune un punto P che non sta in $\mathcal{T}$, allora esse devono avere in comune anche il punto P', simmetrico di P rispetto alla retta $\mathcal{T}$.
Dunque le rette $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{S}$ o coincidono o non hanno alcun punto in comune, cioè sono parallele.

Con questo teorema siamo in grado di dimostrare che:

<u>Data una retta $\mathcal{R}$ ed un punto P, esiste una parallela ad $\mathcal{R}$ passante per P</u> (costruzione della "*doppia perpendicolare*"): basta mandare da P la perpendicolare $\mathcal{T}$ ad $\mathcal{R}$ e poi la perpendicolare $\mathcal{S}$ a $\mathcal{T}$. Per il teorema precedente, essendo $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{S}$ perpendicolari alla stessa retta $\mathcal{T}$ sono fra loro parallele.



Questo teorema non dice affatto che la parallela mandata dal punto P alla retta $\mathcal{R}$ sia unica.

Esercizi

1. Siano A, B punti distinti della retta $\mathcal{R}$ e siano P e Q punti da parti opposte di $\mathcal{R}$, tali che PA = QA e PB = QB. Allora i punti P e Q sono fra loro simmetrici rispetto ad $\mathcal{R}$. (N. 1, pag. 201)

2. Sia P un punto esterno ad una retta $\mathcal{R}$, e sia O la proiezione di P su $\mathcal{R}$. Siano A e B punti di $\mathcal{R}$ tali che A stia fra O e B. Mostrare che PO < PA < PB. (N. 2, pag. 201)

La simmetria centrale

Fissiamo nel piano un punto O; preso un punto P diverso da O, tracciamo la retta PO, quindi sulla semiretta di origine O non contenente P consideriamo un punto P’ tale che $\overline{OP'} = \overline{OP}$.
Abbiamo così un’applicazione P $\rightarrow$ P’ che viene completata facendo corrispondere al punto O il punto O stesso. Essa viene detta **simmetria centrale** di centro O.

Questa applicazione è involutoria e biunivoca.
Essa ha un solo punto fisso, il centro O.
Inoltre le rette che passano per O vengono trasformate in sé.

Si può dimostrare il seguente **teorema**:

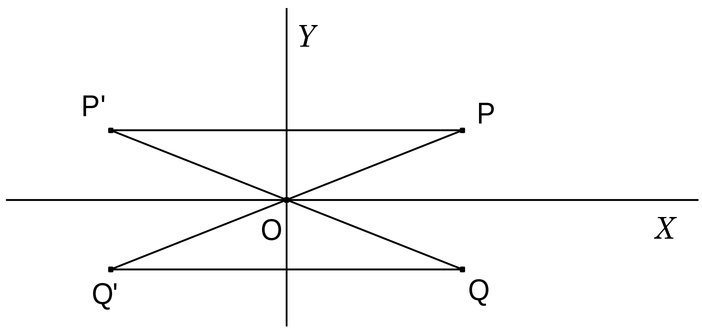
- Una simmetria centrale di centro O si può ottenere come composizione di due simmetrie assiali i cui assi sono due qualsiasi rette fra loro ortogonali che si incontrano in O.

Ecco la traccia della dimostrazione:

Caso P su $\mathcal{X}$ o su $\mathcal{Y}$: ovvio

Caso P non appartenente ad $\mathcal{X}$ o $\mathcal{Y}$:

Sia $S_{\mathcal{Y}}$: P $\rightarrow$ P’ $\quad S_{\mathcal{X}}$: P $\rightarrow$ Q
P’ $\rightarrow$ Q’
Asse $\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$



In $S_{\mathcal{X}}$: il segmento PP’ è perpendicolare a $\mathcal{Y}$ e il punto di intersezione è medio di PP’, dunque anche QQ’ è perpendicolare a $\mathcal{Y}$ e il punto di intersezione è medio di QQ’, dunque in $S_{\mathcal{Y}}$: Q $\rightarrow$ Q’.
Il segmento PQ’ taglia $\mathcal{Y}$ (P e Q’ sono in semipiani opposti), dunque in un punto unito, che appartiene quindi al segmento immagine, P’Q. Quindi PQ’ e P’Q si intersecano in un punto di $\mathcal{Y}$.
Analogamente, in riferimento a $S_{\mathcal{X}}$, si conclude che PQ’ e P’Q si intersecano in un punto di $\mathcal{X}$: se ne deduce che si intersecano in O.
Da $\overline{OP} = \overline{OP'} = \overline{OQ'}$ segue che $\overline{OQ'} = \overline{OP}$ cioè P, O, Q’ sono allineati e O è punto medio di PQ’.
Dunque componendo $S_{\mathcal{Y}}$ con $S_{\mathcal{X}}$ si ottiene la simmetria di centro O.

Una immediata conseguenza di questa proposizione è che:

Una simmetria centrale è un’isometria.

Si ha inoltre che:

- Una simmetria centrale trasforma una retta in una retta ad essa parallela.

Infatti non può succedere che la retta $\mathcal{R}$ e la sua trasformata $\mathcal{R}'$ siano incidenti, cioè abbiano un solo punto in comune perché se il punto P che esse hanno in comune è il centro di simmetria allora

$\mathcal{R} \equiv \mathcal{R}'$. Se P non è il centro di simmetria allora anche il punto P' deve appartenere sia ad $\mathcal{R}$ che ad $\mathcal{R}'$ e quindi le rette $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{R}'$ non hanno un solo punto in comune.

Esercizio

1. In un triangolo due vertici sono equidistanti dalla mediana uscente dall'altro vertice. (N. 12, pag. 272)

<u>Triangoli e quadrilateri con simmetrie</u>

Alcune semplici figure geometriche piane possono essere definite attraverso la simmetria assiale o centrale.
Ad esempio il **triangolo isoscele** è quello con (almeno) un asse di simmetria, il **triangolo equilatero** ha tre assi di simmetria.
Il **rettangolo** è il quadrilatero convesso con due assi di simmetria fra loro perpendicolari e non passanti per i vertici.
Il **rombo** è il quadrilatero convesso con due assi di simmetria fra loro perpendicolari e passanti per i vertici.
Il **quadrato** è il quadrilatero che è rettangolo e rombo, dunque con quattro assi di simmetria.
Il **parallelogrammo** è il quadrilatero convesso con un centro di simmetria.
Precisiamo questo discorso.

- Vediamo come deve essere una terna di punti A B C per essere trasformata in sé da una simmetria assiale di asse $\mathcal{R}$.

La simmetria genera una sostituzione nell'insieme dei vertici {A,B,C}.
Un primo caso è quello in cui ogni vertice corrisponde a se stesso; ma allora tutti i vertici si trovano sulla retta $\mathcal{R}$. In questo caso i tre vertici non individuano un triangolo essendo allineati (potremmo parlare di triangolo **degenere**).
Supponiamo che sia A → B; allora deve essere B → A e il punto C deve corrispondere a sé stesso e quindi deve trovarsi su $\mathcal{R}$.
Un triangolo con un asse di simmetria si dice **isoscele**. Un triangolo non può avere un centro di simmetria (si potrebbe parlare anche in questo caso di triangolo degenere).

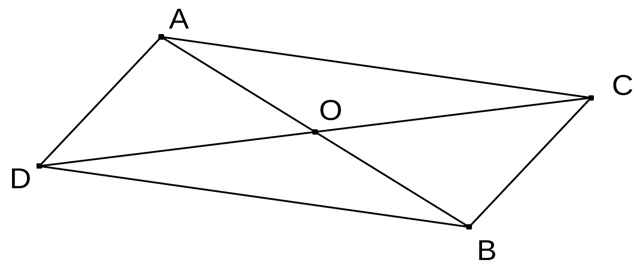
- Consideriamo una quaterna di punti A,B,C,D che venga trasformata in sé da una simmetria di asse $\mathcal{R}$.

Se i vertici sono trasformati in sé, allora essi sono allineati e possono generare solo quadrangoli degeneri.
Escluso questo caso, vi sarà una coppia di vertici che si scambiano fra loro A → B, B → A.
Allora sono possibili due casi: che i punti dell'altra coppia si scambino tra loro, oppure che siano entrambi fissi.
Nel primo caso A e B stanno da parti opposte rispetto ad $\mathcal{R}$ e così pure C e D. I segmenti AB e CD sono paralleli, inoltre il punto C può essere nello stesso semipiano di A, rispetto ad $\mathcal{R}$ ed in tal caso i segmenti AC e BD non possono incontrarsi, oppure nel semipiano opposto e quindi i segmenti AC e BD si incontrano. Delle configurazioni possibili due non sono quadrangoli convessi, la terza è un quadrangolo convesso: il trapezio isoscele.

Nel secondo caso, AB e CD sono diagonali e il quadrilatero è convesso se si tagliano, altrimenti non è convesso.

- Vediamo come deve essere una quaterna di punti A, B, C, D per essere trasformata in sé da una simmetria centrale con cento O.

Poiché in una simmetria centrale l'unico punto fisso è il centro, non è possibile che uno dei vertici coincida con O. L'unica possibilità è che vi siano due coppie A, B e C, D di punti simmetrici rispetto ad O.
Supponiamo che A, B e C, D non siano allineati. AC e BD sono paralleli (infatti una simmetria centrale trasforma una reta in una retta parallela), così come $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, mentre AB e CD si incontrano in O. Dunque per avere un quadrangolo convesso ABCD, bisogna prendere AB e CD come diagonali.



Per il quadrangolo convesso valgono le seguenti proprietà :

- i lati opposti sono paralleli e isometrici (infatti si corrispondono nella simmetria centrale di centro O);
- le diagonali si tagliano a metà ($\overline{OA} = \overline{OB}$ perché A e B sono simmetrici rispetto ad O);
- gli angoli opposti sono isometrici (si corrispondono in una isometria, che è appunto la simmetria centrale).

Un quadrangolo convesso ABCD con un centro di simmetria si dice **parallelogrammo**.

Se i punti A, B, C, D sono allineati, si ottiene un parallelogrammo degenere, ma che gode delle proprietà che abbiamo esposto.

- Vediamo come può essere una quadrangolo ABCD che viene trasformato in sé da una simmetria di asse x e da una simmetria di asse y, con x perpendicolare a y.

Sia O il punto di incontro degli assi e siano S_x la simmetria di asse x e S_y la simmetria di asse y.
Il primo caso è quello in cui vi sia in vertice A che non appartiene ad alcuno degli assi; dunque S_x: A → B e S_y: A → C. Notiamo che C è dalla stessa parte di A rispetto ad x e da parte opposta rispetto a y, invece B è dalla stessa parte di A rispetto ad y e da parte opposta rispetto a x, dunque C è diverso da B. Deve allora essere S_x: C → D e S_y: B → D. Il quadrangolo è un **rettangolo**.

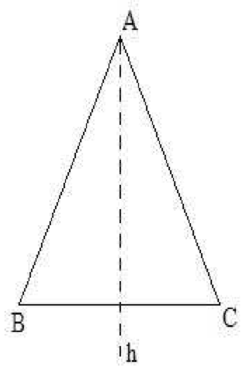
Il secondo caso è quello in cui tutti i vertici A, B, C, D sono sugli assi. Nessuno può essere coincidente con O e non possono essere tutti sullo stesso asse, perché allora il quadrangolo sarebbe degenere. In questo caso il quadrangolo è un **rombo**.

Quando si verificano entrambi i casi, cioè esistono due coppie di assi ortogonali che sono assi di simmetria del quadrangolo, si ottiene un particolare rombo che è anche un rettangolo, il **quadrato**.

Esercizio svolto (N. 2, pag. 213)

Dimostrare che un triangolo ABC con due lati di uguale lunghezza è isoscele (cioè ha un asse di simmetria).

Sia AB = AC. Occorre dimostrare che ABC ha un asse di simmetria. Sia h la bisettrice in figura.



La simmetria di asse h è tale che: semiretta AB → semiretta AC (per definizione di bisettrice).

Ora, B', immagine di B, è sulla semiretta AC.

Ma AB = AB', quindi per l'assioma A_5 B' = C.

In conclusione, in S_h, A è unito e B → C.

Esercizi

1. Si consideri su un cerchio con centro in O un punto P. Dimostrare che:
   a) La retta per P ortogonale al raggio OP ha in comune col cerchio il solo punto P.
   b) Ogni altra retta per P ha punti interni al cerchio e taglia il cerchio in un secondo punto Q.
   [per rispondere al punto b) si cerchi un asse di simmetria della figura] (N. 1, pag. 213)

2. Dati due punti A, B e fissato uno dei due semipiani generati dalla retta AB, in esso vi è al più un punto che ha distanze assegnate da A e da B. (N. 3, pag. 213)

3. Un quadrilatero convesso che ha i lati opposti di uguale lunghezza è un parallelogrammo. (N. 4, pag. 213)

4. Un parallelogrammo con i lati uguali è un rombo. (N. 5, pag. 213)

   (si noti che da 3. e 4. segue: un quadrilatero con i lati uguali è un rombo)

5. Sia ABC un triangolo isoscele di base BC. Dimostrare che, comunque si prenda un punto H dell'altezza relativa a BC, la retta CH taglia AB in un punto M e la retta BH taglia AC in un punto N tale che BM = CN. (N. 15, pag. 273)

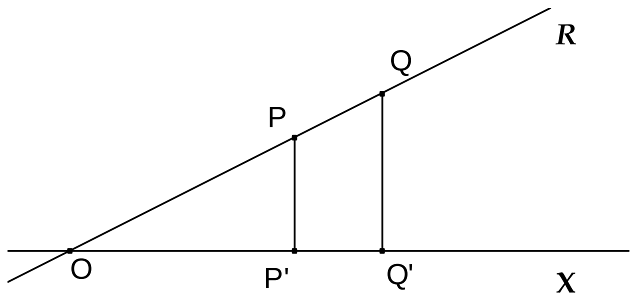
6. E' dato un triangolo isoscele ABC di base BC. Considerati due punti M e N sui lati uguali, equidistanti dal vertice, e condotte da essi le perpendicolari alla base BC che incontrano nei punti E ed F, dimostrare che EFA è un triangolo isoscele. (N. 18, pag. 273)

<u>L’assioma del rapporto di proiezione e il teorema di Pitagora</u>

Data una retta $\mathcal{X}$ risulta definita la **proiezione** su $\mathcal{X}$, cioè l’applicazione che fa corrispondere a ciascun punto del piano il punto di $\mathcal{X}$ più vicino.

Ovviamente risulta che la **proiezione** su $\mathcal{X}$ è un’applicazione suriettiva ma non iniettiva.

Cosa succede quando si proietta su $\mathcal{X}$ una qualsiasi retta $\mathcal{R}$ incidente ad $\mathcal{X}$ e obliqua (cioè non ortogonale) ad $\mathcal{X}$?



Intuitivamente, se due punti P, Q di $\mathcal{R}$ si proiettano nei punti P’, Q’ deve essere $\overline{OP'}/\overline{OP}$ = $\overline{OQ'}/\overline{OQ}$, cioè $\overline{OP'}$ deve essere direttamente proporzionale ad $\overline{OP}$.

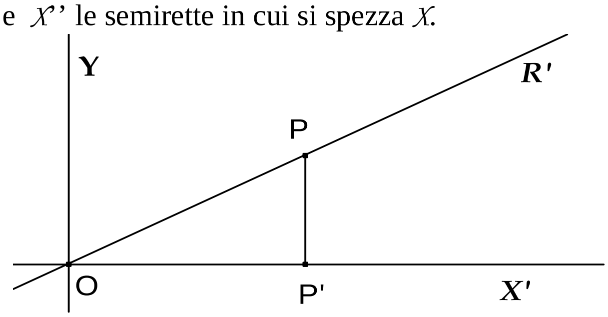
Questo fatto non può essere dimostrato con gli assiomi di cui disponiamo, pertanto è opportuno un altro assioma:

A9 (Assioma)	Se $\mathcal{X}$ ed $\mathcal{R}$ sono rette che si incontrano in O, indicando con P’ la proiezione di un punto P di $\mathcal{R}$ su $\mathcal{X}$ si ha $\overline{OP'}$ = k $\overline{OP}$ dove k è una costante (che viene detta **rapporto di proiezione**).

L’affermazione importante di questa proposizione è che k è costante, cioè non dipende dal punto che si proietta.

Se facciamo variare la retta $\mathcal{R}$ tenendo fisso il punto di incidenza O, varierà anche k.
Non abbiamo imposto che $\mathcal{R}$ sia un’obliqua perché anche il caso in cui $\mathcal{R}$ sia ortogonale ad $\mathcal{X}$ rientra in questa formulazione, con k = 0.
Se k = 1, $\mathcal{R}$ coincide con $\mathcal{X}$; in tutti gli altri casi si ha k < 1.

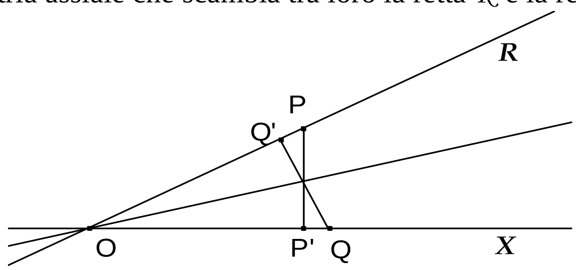
Da queste considerazioni seguono le definizioni di **angolo acuto** e di **angolo ottuso**, nel modo seguente. Se due rette, $\mathcal{X}$ e $\mathcal{R}$ sono incidenti e non ortogonali, le quattro semirette che individuano si possono far corrispondere biunivocamente con la proiezione: in che modo? Sia O il punto di intersezione e siano $\mathcal{X}$’ e $\mathcal{X}$’’ le semirette in cui si spezza $\mathcal{X}$.



Se da O si manda la perpendicolare $\mathcal{Y}$ ad $\mathcal{X}$, la retta PP’ risulta parallela ad $\mathcal{Y}$ e quindi i punti P e P’ stanno dalla stessa parte rispetto ad $\mathcal{Y}$: dunque le due semirette che si corrispondono nella proiezione sono quelle che stanno nello stesso semipiano rispetto ad $\mathcal{Y}$. Se $\mathcal{R}'$ e $\mathcal{X}'$ sono tali semirette, l’angolo ($\mathcal{X}'$, $\mathcal{R}'$) è contenuto in un angolo retto: diciamo che l’angolo ($\mathcal{X}'$, $\mathcal{R}'$) è **acuto**, mentre l’angolo ($\mathcal{X}''$, $\mathcal{R}'$) è **ottuso**.

E’ utile osservare che il rapporto di proiezione della retta $\mathcal{R}$ sulla retta $\mathcal{X}$ è uguale al rapporto di proiezione della retta $\mathcal{X}$ sulla retta $\mathcal{R}$.

Infatti, esiste una simmetria assiale che scambia tra loro la retta $\mathcal{R}$ e la retta $\mathcal{X}$.

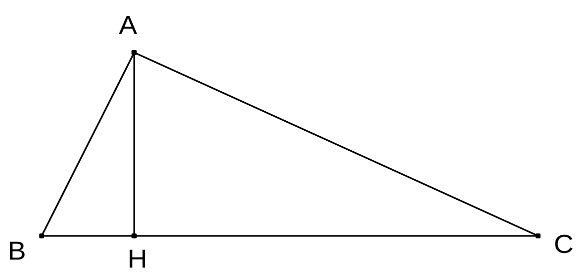


Sia P un punto di $\mathcal{R}$, P’ la sua proiezione su $\mathcal{X}$; la simmetria rispetto alla bisettrice porta P in Q e P’ in Q’. Essendo la simmetria un’isometria, il segmento [Q,Q’] risulta ortogonale ad $\mathcal{R}$ e si ha $\overline{OQ} = \overline{OP}$, $\overline{OQ'} = \overline{OP'}$; dunque è $\overline{OP'}/\overline{OP} = \overline{OQ'}/\overline{OQ}$ = k.
Si conclude che il rapporto di proiezione è il medesimo.

Ricordiamo che si dice **triangolo rettangolo** un triangolo con un angolo retto: i lati adiacenti all’angolo retto si dicono **cateti**, il lato opposto si dice **ipotenusa**.

Possiamo ora enunciare il **teorema di Pitagora**:

In un triangolo rettangolo, il quadrato della lunghezza dell’ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati delle lunghezze dei cateti.



Il triangolo rettangolo considerato abbia l’angolo retto in A. Indichiamo con k il rapporto di proiezione della semiretta BC sulla semiretta BA e con k’ il rapporto di proiezione della semiretta CB sulla semiretta CA. Il punto A si proietta sulla retta BC nel punto H: poiché H appartiene alla semiretta BC e anche alla semiretta CB, H risulta compreso tra B e C.
Si compiono ora delle operazioni di proiezione:

proiettando il punto B sulla retta CA si ottiene $\overline{CA}$ = k’ $\overline{BC}$ (1)

proiettando il punto A sulla semiretta CB si ottiene $\overline{CH}$ = k’ $\overline{CA}$ = k’^{2} $\overline{BC}$ (2)

proiettando il punto C sulla semiretta BA si ottiene $\overline{BA}$ = k $\overline{BC}$ (3)

proiettando il punto A sulla semiretta BC si ottiene $\overline{BH}$ = k $\overline{BA}$ = k^2 $\overline{BC}$. (4)

Poiché il punto H sta tra B e C, si ha $\overline{BC} = \overline{BH} + \overline{CH}$; sostituendo in questa uguaglianza i valori dati dalla (2) e dalla (4), si ha

$\overline{BC} = k^2\ \overline{BC} + k'^2\ \overline{BC}$;

moltiplicando questa relazione membro a membro per $\overline{BC}$ si ricava

$\overline{BC}^2 = k^2\ \overline{BC}^2 + k'^2\ \overline{BC}^2$ e, tenendo conto della (1) e della (3), si ha

$\overline{BC}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{CA}^2$ che è la tesi del teorema di Pitagora.

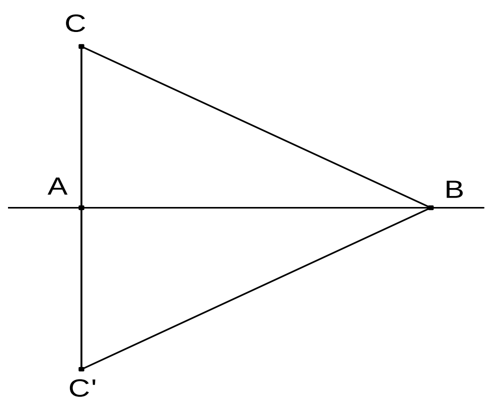
Si possono fare le seguenti osservazioni:

- dividendo per $\overline{BC}$ la relazione $\overline{BC}^2 = k^2\ \overline{BC}^2 + k'^2\ \overline{BC}^2$ si ottiene una relazione che lega i due rapporti di proiezione : $k^2 + k'^2 = 1$;
- dalle relazioni (1) e (2) si ricava $\overline{BC}/\overline{CA} = \overline{CA}/\overline{CH}$.
  questa relazione va sotto il nome di *primo teorema di Euclide* e si enuncia nella forma :
  “un cateto è medio proporzionale fra l’ipotenusa e la proiezione del cateto stesso sull’ipotenusa”.

Si può dimostrare ora un teorema che è **inverso del teorema di Pitagora**:

Se si ha $\overline{BC}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{BA}^2$ allora il triangolo ABC è rettangolo in A.

La dimostrazione consiste nel confrontare il nostro triangolo rettangolo con un opportuno triangolo rettangolo. Sia ABC un triangolo tale che $\overline{BC}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{BA}^2$.



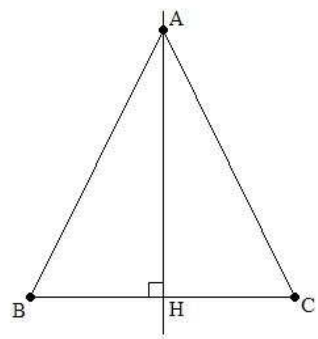
Nel semipiano opposto rispetto alla retta AB,costruiamo un triangolo rettangolo in A: ABC’ tale che $\overline{AC'} = \overline{AC}$.

Per il teorema di Pitagora si ha $\overline{C'B} = \sqrt{\ \overline{AB}^2 + \overline{AC'}^2} = \sqrt{\ \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2}$ dunque è $\overline{C'B} = \overline{CB}$.

Allora il punto B, essendo equidistante da C e da C’, deve trovarsi sull’asse del segmento [C,C’]; anche il punto A deve trovarsi sull’asse, essendo $\overline{AC'} = \overline{AC}$. Ma allora la retta AB è l’asse del segmento [C,C’], quindi i punti C, C’ sono tra loro simmetrici rispetto all’asse AB. Essendo l’angolo C’AB retto, anche l’angolo BAC, simmetrico, deve essere retto.

Esercizio svolto

In un triangolo isoscele gli angoli alla base sono acuti.



Il triangolo isoscele ha un asse di simmetria, la retta AH.
B e C si scambiano, dunque il segmento BC è perpendicolare ad AH. Quindi A si proietta in H, che è tra B e C, cioè la semiretta BA si proietta nella semiretta BH e quindi l'angolo in B è acuto. Analogamente per l'angolo in C.

Esercizi

1. In un triangolo rettangolo, gli angoli non retti sono acuti. (N.1, pag. 220)

2. Calcolare il rapporto di proiezione per questi angoli:
   - ~ Angolo della diagonale di un quadrato con un lato (45°);
   - ~ Angolo di un triangolo equilatero (60°);
   - ~ Angolo della bisettrice di un triangolo equilatero con un lato (30°).

   (N.6, pag. 221)

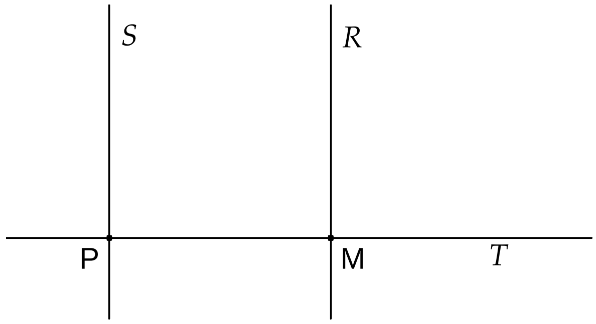
3. In un triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa è media proporzionale fra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa. (Secondo teorema di Euclide). (N.7, pag. 221)

4. In un cerchio, assegnate due corde, quella che ha dal centro distanza minore ha lunghezza maggiore. (N. 8, pag. 221)

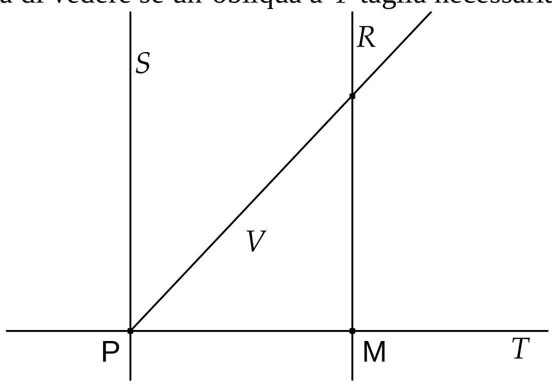
5. Dato un cerchio di centro O ed un punto P ad esso interno, verificare che la corda di lunghezza minima che passa per P è quella perpendicolare al diametro per P. (N.9, pag. 221)

Unicità della parallela

Abbiamo già visto come si può costruire una parallela ad una retta $\mathcal{R}$ che passi per un punto P esterno ad essa: si manda da P la perpendicolare $\mathcal{T}$ ad $\mathcal{R}$ e successivamente la retta $\mathcal{S}$ perpendicolare a $\mathcal{T}$ per P.



Ci possono essere altre parallele alla retta $\mathcal{R}$ oltre alla retta $\mathcal{S}$ che abbiamo costruito? Ogni altra retta per P è obliqua a $\mathcal{T}$: si tratta di vedere se un'obliqua a $\mathcal{T}$ taglia necessariamente $\mathcal{R}$.



Presa una qualsiasi obliqua consideriamo la semiretta $\mathcal{V}$ contenuta nel semipiano generato da $\mathcal{S}$ che contiene $\mathcal{R}$. Questa semiretta si proietta ortogonalmente nella semiretta PM, dove M è il punto di intersezione di $\mathcal{R}$ con $\mathcal{T}$. E' intuitivo che $\mathcal{V}$ incontri $\mathcal{R}$: per dimostrarlo ricordiamo che i punti di $\mathcal{R}$ sono tutti e soli quelli che nella proiezione su $\mathcal{T}$ vanno in M. Possiamo applicare l'assioma A9: si tratta di vedere se esiste un punto Q su $\mathcal{V}$ tale che

$\overline{PM}$ = k $\overline{PQ}$

con k rapporto di proiezione di $\mathcal{V}$. Poiché $\mathcal{V}$ è obliqua è k > 0. Allora l'equazione si risolve subito: $\overline{PQ} = \overline{PM}$ / k ; quindi esiste sulla semiretta $\mathcal{V}$ un punto Q che è in comune con $\mathcal{R}$.

Dunque abbiamo dimostrato che

I) È unica la parallela mandata ad una retta da un punto ad essa esterno.

Questa affermazione è l'assioma introdotto da Euclide.

Vediamo ora alcune **conseguenze** dell'unicità della parallela:

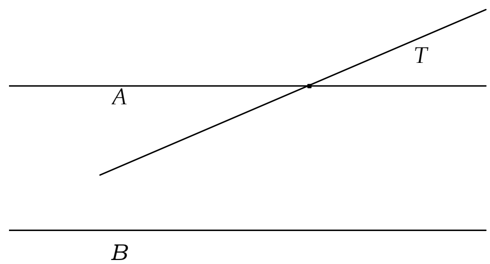
II) Se la retta $\mathcal{A}$ è parallela a $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}$ è parallela a $\mathcal{C}$ allora $\mathcal{A}$ è parallela a $\mathcal{C}$.

Infatti se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{C}$ non fossero parallele, cioè se fossero incidenti, per il loro punto di incontro P passerebbero due rette parallele a $\mathcal{B}$; ciò non può verificarsi.

Esaminiamo la relazione: $\mathcal{A}$ è parallela a $\mathcal{B}$. Questa relazione gode delle proprietà:
riflessiva, cioè $\mathcal{A}$ è parallela ad $\mathcal{A}$; questo perché, secondo la nostra definizione, due rette coincidenti sono da considerarsi parallele;
simmetrica, cioè se $\mathcal{A}$ è parallela a $\mathcal{B}$, allora $\mathcal{B}$ è parallela ad $\mathcal{A}$; anche questa proprietà è contenuta nella definizione, tanto che abbiamo parlato fin da principio di *rette fra loro parallele*;
transitiva: è esattamente l'enunciato I che abbiamo dimostrato ora.

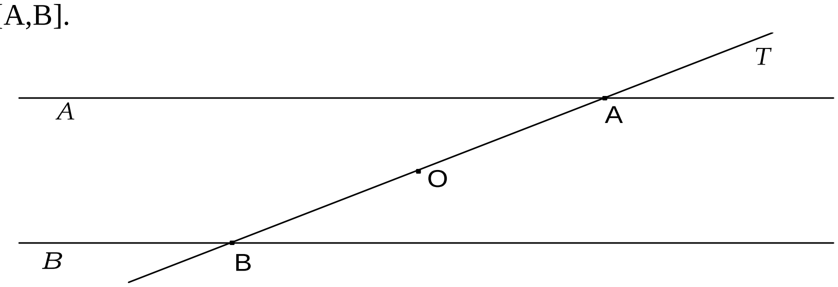
Possiamo concludere che la relazione di parallelismo è una relazione di **equivalenza**.
Dunque, le rette del piano risultano suddivise in classi di equivalenza, formate da rette fra loro parallele. Una classe di equivalenza si dice una **direzione**.

III) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ siano parallele: allora una retta $\mathcal{T}$ incidente all'una è incidente all'altra.



Se $\mathcal{T}$ fosse incidente ad $\mathcal{A}$ ma parallela a $\mathcal{B}$, vi sarebbero due rette, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{T}$, passanti per uno stesso punto e parallele a $\mathcal{B}$ e si andrebbe contro l'unicità della parallela.

Proseguiamo: siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ parallele e sia $\mathcal{T}$ una retta incidente ad entrambe (si dice anche trasversale). Siano A e B rispettivamente i punti di incontro con $\mathcal{A}$ e con $\mathcal{B}$ e sia O il punto medio del segmento [A,B].



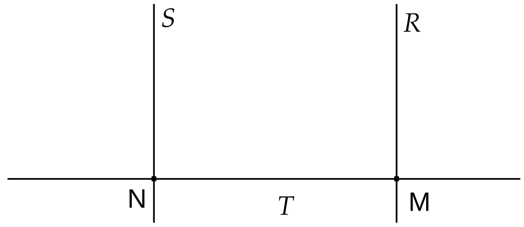
Allora si può dire che:

IV) Una simmetria centrale con centro O porta la retta $\mathcal{A}$ a coincidere con la retta $\mathcal{B}$.

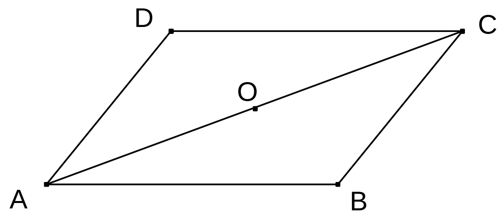
Infatti la simmetria centrale con centro O porta la retta $\mathcal{A}$ in una retta $\mathcal{A}'$ che passa per B ed è parallela ad $\mathcal{A}$; ma la parallela ad $\mathcal{A}$ condotta per il punto B è unica. Quindi deve essere $\mathcal{A}' = \mathcal{B}$.

Come conseguenza del teorema precedente si dimostrano le proposizioni V e VI:

V) Se $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{S}$ sono parallele, una retta $\mathcal{T}$ ortogonale all'una è ortogonale all'altra.

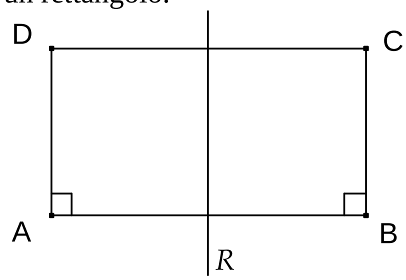


VI) Un quadrilatero con i lati opposti paralleli è un parallelogrammo (cioè ha un centro di simmetria)



Si è visto che si può definire rettangolo un quadrilatero con due assi di simmetria fra loro ortogonali e perpendicolari ai lati. Siamo ora in grado di caratterizzare in modo più semplice il rettangolo:

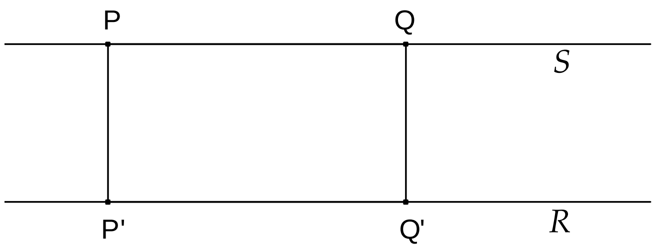
VII) Un quadrangolo con i lati opposti paralleli (cioè un parallelogrammo) che abbia un angolo retto è un rettangolo.



Supponiamo che l'angolo A sia retto; per il teorema V) tutti gli angoli sono retti. Consideriamo l'asse $\mathcal{R}$ del segmento [A,B]; la simmetria con asse $\mathcal{R}$ trasforma A in B e trasforma la retta AD nella retta BC. La retta CD, essendo parallela ad AB, è ortogonale ad $\mathcal{R}$ e viene trasformata in sé dalla simmetria di asse $\mathcal{R}$. Allora il punto D di intersezione della retta AD con la retta CD viene trasformato nel punto C, che è intersezione della retta BC con la retta CD. Si conclude che $\mathcal{R}$ è un asse di simmetria del rettangolo. Allo stesso modo si vede che il quadrilatero ABCD ha un asse di simmetria che coincide con l'asse del segmento [A,D] e che è ortogonale ad AD e quindi ad $\mathcal{R}$.

Vale infine un importante risultato:

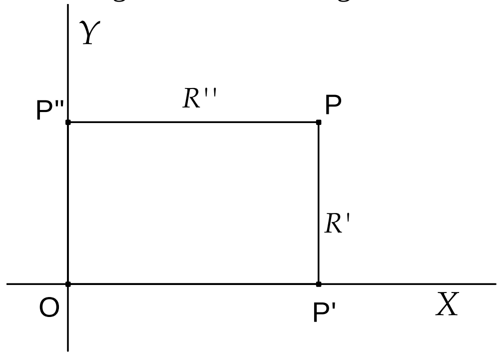
VIII) Due rette parallele sono fra loro equidistanti.



Si tratta di dimostrare che se $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{S}$ sono due rette fra loro parallele e se P e Q sono due punti di $\mathcal{S}$, la distanza di P da $\mathcal{R}$ è uguale alla distanza di Q da $\mathcal{R}$. Sia P' la proiezione di P su $\mathcal{R}$, Q' la proiezione di Q su $\mathcal{R}$, il segmento [P,P'] è ortogonale ad $\mathcal{R}$, così come il segmento [Q,Q']; i lati [P,P']e [Q,Q'] sono fra loro paralleli. Anche i lati [P,Q] e [P',Q'] sono paralleli per ipotesi. Allora per il teorema precedente, PP'Q'Q è un rettangolo. Dunque $\overline{PP'} = \overline{OQ'}$.

A questo punto della teoria è possibile fissare un **riferimento cartesiano**, cioè una corrispondenza biunivoca fra punti del piano e coppie ordinate di numeri reali.
Siano $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ due rette ortogonali fra loro. Ad ogni punto P del piano possiamo associare la sua proiezione P' su $\mathcal{X}$ e la sua proiezione P'' su $\mathcal{Y}$. Viceversa, assegnata una coppia di punti P' su $\mathcal{X}$ e

P’’ su $\mathcal{Y}$, c’è un unico punto P che ha come proiezione su $\mathcal{X}$ il punto P’ e come proiezione su $\mathcal{Y}$ il punto P’’. Infatti la retta $\mathcal{R}'$ ortogonale ad $\mathcal{X}$ per P’ e la retta $\mathcal{R}''$, ortogonale ad $\mathcal{Y}$ per P’’, si incontrano in un unico punto P. Occorre tenere presente che $\mathcal{R}'$ è parallela ad $\mathcal{Y}$, essendo, come $\mathcal{Y}$, ortogonale ad $\mathcal{X}$; la retta $\mathcal{R}''$, che è ortogonale ad $\mathcal{Y}$, è ortogonale ad $\mathcal{R}'$ e quindi incidente a $\mathcal{R}'$.



Fissati su $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ due sistemi di coordinate (come già osservato dopo l’assioma A5) è evidente che si è posta una corrispondenza biunivoca fra punti del piano e coppie ordinate di numeri reali.

Esercizi

1. Quanti assi di simmetria (e quanti centri di simmetria) hanno le seguenti figure?
   a) due rette parallele
   b) due segmenti paralleli
   c) un segmento (N. 23, pag. 273)

2. Rette perpendicolari a rette incidenti sono incidenti. (N. 5, pag. 274)

3. Dimostrare che dati tre punti A, B, C non allineati, esiste un unico punto equidistante da tutti e tre. (N. 2, pag. 227)

4. Dimostrare che i tre vertici di un triangolo rettangolo hanno uguale distanza dal punto di mezzo dell’ipotenusa. [Fare una simmetria centrale con centro nel punto di mezzo dell’ipotenusa] (N.6, pag. 233)

5. Un parallelogrammo in cui le diagonali hanno ugual lunghezza è un rettangolo. (N. 7, pag. 233)

6. Un triangolo ABC inscritto in un semicerchio avente come diametro [B,C] è rettangolo in A. [Fare una simmetria centrale con centro nel punto di mezzo di [B,C]] (N. 8, pag. 234)

7. Dati tre punti non allineati, trovare le rette equidistanti da essi. (N. 7, pag. 274)

8. Sia ABCD un parallelogrammo e A’B’C’D’ un parallelogrammo inscritto in esso. Dimostrare che hanno lo stesso centro. (N. 9, pag. 274)

Le traslazioni

Si dice **traslazione** un'applicazione biunivoca del piano in sé tale che:

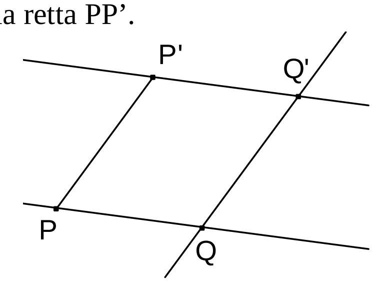
1) i punti si spostano tutti in una stessa direzione ;
2) ogni retta del piano viene trasformata in una retta ad essa parallela .

Fra le traslazioni includiamo anche quella che lascia fermi tutti i punti, cioè l'identità.

Nella definizione non si dice che la traslazione è un'isometria: questa proprietà verrà dimostrata più avanti, come conseguenza delle proprietà 1) e 2) della definizione.

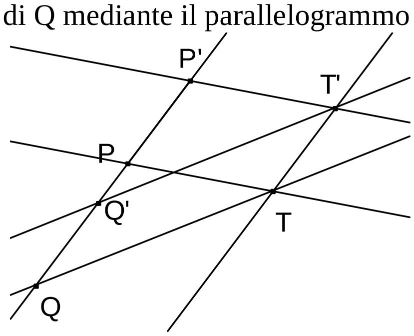
Supponiamo di sapere che una traslazione t diversa dall'identità manda il punto P nel punto P':
t (P) = P'.
Siamo in grado di determinare il corrispondente di un altro punto Q qualsiasi?

1° caso: supponiamo che Q non appartenga alla retta PP'; domandiamoci dove deve trovarsi il punto Q'= t (Q).
In base alla proprietà 2), la retta PQ viene trasformata in una retta ad essa parallela, che dovrà contenere i punti P' e Q': dunque Q' deve trovarsi sulla parallela alla retta PQ mandata per il punto P'. D'altra parte, per la proprietà 1) i punti devono spostarsi tutti nella medesima direzione, cioè la retta QQ' deve essere parallela alla retta PP'.



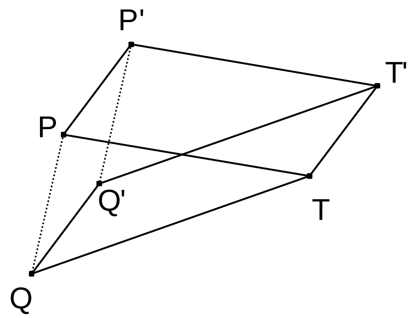
In conclusione: il punto Q' è il punto di incontro delle due rette seguenti:
parallela alla retta PQ mandata per il punto P';
parallela alla retta PP'mandata per il punto Q.
Queste due rette si incontrano effettivamente perché, essendo il punto Q per ipotesi fuori della retta PP', le rette PP', PQ sono incidenti e sono quindi incidenti anche le due rette ad esse parallele che ci interessano.
Possiamo descrivere la nostra costruzione così: il punto Q' richiesto è l'unico punto Q'tale che il quadrilatero P'PQQ' sia un parallelogrammo.
(attenzione: è essenziale l'ordine con cui si indicano i punti P'PQQ').

2° caso: vediamo ora come si può procedere nel caso in cui Q si trovi sulla retta PP'. La costruzione fatta prima non si può applicare. Possiamo però arrivare allo scopo con un passo intermedio: se T è un punto qualsiasi fuori dalla retta PP', costruiamo il suo corrispondente T' mediante il parallelogrammo P'PTT'; quindi, poichè Q si trova fuori dalla retta TT', siamo in grado di costruire il corrispondente Q' di Q mediante il parallelogrammo T'TQQ'.



In sostanza siamo arrivati allo scopo eseguendo due volte la costruzione indicata prima. Questo procedimento è detto "*del doppio parallelogrammo*".

Riesaminiamo la costruzione eseguita in questo secondo caso in cui il punto Q è preso sulla retta PP'; viene spontaneo chiedersi: non accadrà che anche in questo caso il quadrilatero PQQ'P' sia un parallelogrammo?
La risposta è affermativa ed è ottenuta attraverso il seguente teorema (di cui omettiamo la dimostrazione):
Se TQQ'T' e TPP'T' sono entrambi parallelogrammi, anche PQQ'P' è un parallelogrammo.



Possiamo dunque concludere questo primo studio sulle traslazioni con la seguente affermazione valida anche nel caso in cui la traslazione sia un'identità:
Se una traslazione t manda P in P', essa manda un punto Q nell'unico punto Q' tale che PQQ'P' sia un parallelogrammo.
Ed ora possiamo rispondere al quesito lasciato in sospeso all'inizio:

Una traslazione è un'isometria.

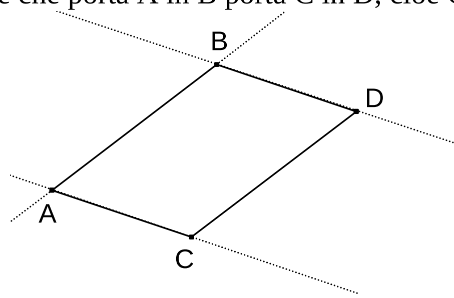
Infatti, siano P, Q due punti arbitrari del piano, P' e Q' i loro corrispondenti in una traslazione; per quanto abbiamo dimostrato PQQ'P' è un parallelogrammo. La simmetria che ha per centro il centro del parallelogrammo manda P in Q' e Q in P', dunque si ha $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$.

Esponiamo alcune osservazioni fondamentali riguardanti le traslazioni. Abbiamo visto che una simmetria centrale si può vedere come composizione di due simmetrie assiali.
Vogliamo vedere che una traslazione si può anch'essa ottenere come la composizione di due simmetrie assiali: cominciamo però col dimostrare che una traslazione si può ottenere come prodotto di due simmetrie centrali.

Premettiamo ancora un teorema che esprime una nuova proprietà delle traslazioni:

I) Siano dati quattro punti ABCD con le seguenti proprietà:
   a) C e D si trovano nello stesso semipiano rispetto alla retta AB;
   b) le rette AC e BD sono parallele;
   c) $\overline{AC} = \overline{BD}$.

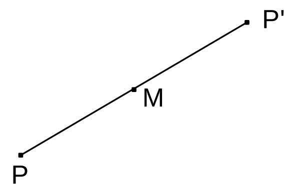
   Allora la traslazione che porta A in B porta C in D, cioè CABD è un parallelogrammo.



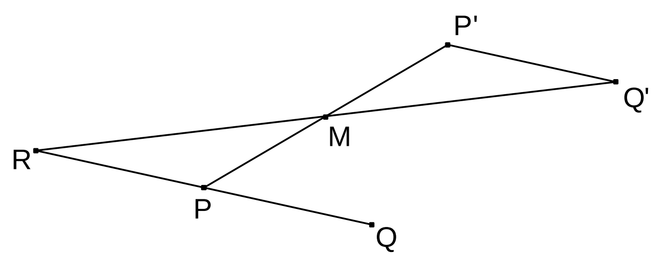
Infatti, la traslazione che porta A in B trasforma la retta AC in una retta ad essa parallela per B: questa non può che essere la retta BD. Il punto C va a finire in un punto C' che si trova nello stesso semipiano di C rispetto alla retta AB. Infatti [C,C'] non ha punti in comune con la retta AB essendo parallelo ad essa. Il punto C' si trova sulla semiretta BD, a distanza $\overline{AC} = \overline{BD}$ dal punto B. Allora esso coincide con il punto D.
In conclusione, la traslazione che porta A in B porta C in D.

Ed ecco in forma precisa il teorema che abbiamo preannunciato:

II) Una traslazione t che manda P in P' può essere ottenuta come prodotto di due simmetrie centrali: la prima σ con centro nel punto P, la seconda τ con centro nel punto di mezzo M del segmento [P,P'].



E' evidente che la prima simmetria lascia fermo il punto P, mentre la seconda manda P in P'; dunque l'applicazione composta manda P in P'. Per dimostrare che $\tau \cdot \sigma$ è una traslazione (e coincide con t) resta da vedere a) che essa trasforma ogni retta in una retta ad essa parallela e b) che tutti i punti si muovono in una medesima direzione (quella della retta PP').
La a) è ovvia perché ogni simmetria centrale trasforma una retta in una retta ad essa parallela; dunque ogni retta viene trasformata da σ in una retta parallela e questa ancora da τ in una retta parallela.
Resta da dimostrare la b): sia Q un punto qualsiasi; se esso si trova sulla retta PP', è chiaro che le due simmetrie centrali lo trasformano in un punto della retta PP'.
Vediamo che cosa succede se il punto Q è fuori dalla retta PP', la simmetria σ con centro in P lo trasforma in un punto R tale che $\overline{QP} = \overline{RP}$; la simmetria τ trasforma R in Q'; poiché la stessa simmetria τ porta P in P', si ha $\overline{PR} = \overline{P'Q'}$ e quindi $\overline{P'Q'} = \overline{PQ}$.



Ora riflettiamo che Q e Q'si trovano nello stesso semipiano rispetto alla retta PP', essendo entrambi nel semipiano opposto rispetto a quello che contiene R. La retta PQ è parallela alla P'Q', essendo corrispondente di essa nella simmetria con centro M; allora per il teorema dimostrato, la traslazione che porta P in P' porta Q in Q'; si conclude che, qualunque sia il punto Q, applicando a Q successivamente la simmetria σ e la simmetria τ, si ottiene lo stesso risultato che si ottiene applicando la traslazione t. Si conclude : $t = \tau \cdot \sigma$.

Osservazione importante: la dimostrazione svolta fa vedere che la composizione di due simmetrie centrali qualunque è una traslazione: infatti la dimostrazione rimane valida se i punti P e M sono assegnati in modo arbitrario: la traslazione che si ottiene è quella che manda P nel suo simmetrico P' rispetto a M.

Ora è facile dimostrare l'altro dei risultati che abbiamo preannunciato:

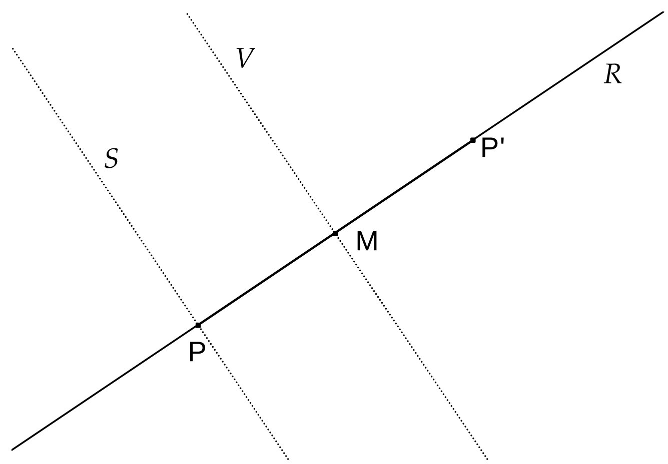
III) Ogni traslazione può essere ottenuta componendo due simmetrie assiali con assi fra loro paralleli.

Sia t la traslazione che manda P in P'; possiamo supporre P $\neq$ P'; nel caso P = P' quello che vogliamo dimostrare è evidente perché t si riduce all'identità.
Sappiamo che ogni simmetria centrale si può ottenere come composizione di simmetrie assiali con assi passanti per il centro e ortogonali fra loro. Indichiamo con $\mathcal{R}$ la retta PP', con $\mathcal{S}$ la perpendicolare ad $\mathcal{R}$ mandata per il punto P, con $\mathcal{V}$ la perpendicolare ad $\mathcal{R}$ mandata per il punto di mezzo M del segmento [P,P']. Si ha indicando, con σ la simmetria con centro P e con τ la simmetria con centro M,

$\sigma = S_{\mathcal{R}} \cdot S_{\mathcal{S}}$ e $\tau = S_{\mathcal{V}} \cdot S_{\mathcal{R}}$

perciò

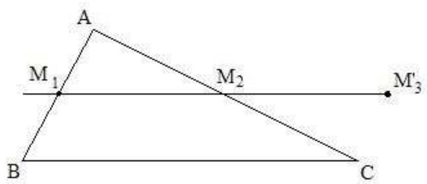
$t = \tau \cdot \sigma = S_{\mathcal{V}} \cdot S_{\mathcal{R}} \cdot S_{\mathcal{R}} \cdot S_{\mathcal{S}} = S_{\mathcal{V}} \cdot S_{\mathcal{S}}$ poiché $S_{\mathcal{R}} \cdot S_{\mathcal{R}}$ è l'identità.



E' evidente che ci sono infiniti modi di scomporre una traslazione in due simmetrie centrali (o assiali): infatti la coppia P, P' di punti corrispondenti può essere scelta in infiniti modi.

Esercizio svolto (N. 2, Pag. 213)

Dato un triangolo, la retta che congiunge i punti di mezzo di due lati è parallela al terzo.



Chiamiamo M_1 e M_2 i punti medi di AB e AC rispettivamente.
B viene mandato in A da S_{M1}, e A in C da S_{M2} .
Con la stessa composizione, M_1 viene mandato prima in M_1 e poi in M_3', dunque possiamo vedere M_3' come il traslato di M_1. Allora M_1M_3' // BC e dunque M_1M_2 // BC.
Inoltre M_1M_3' = BC, M_1M_2= M_2M_3' e dunque M_1M_2 è la metà di BC.

Esercizi

1. Presi tre punti A, B, C non allineati, trovare tutti i possibili parallelogrammi di cui A, B, C sono vertici. Dimostrare che i nuovi vertici sono vertici di un triangolo di cui A, B, C sono i punti medi. (N.10, pag. 11)

2. Dato un quadrilatero qualunque ABCD, il quadrilatero che ha per vertici, ordinatamente, i punti di mezzo dei lati è un parallelogrammo. (N.11, pag. 11)

3. Una traslazione che manda un punto P in un punto P' (diverso da P) trasforma in sé ciascuno dei due semipiani individuati dalla retta PP'. (N.1, pag. 15)

4. Date due rette R, R' fra loro parallele, vi sono traslazioni che mandano R in R '? Queste traslazioni come possono essere individuate? Come trasformano la striscia compresa tra R ed R '? (N.2, pag. 16)

5. Fra tutte le traslazioni che mandano una retta R in una retta R', ad essa parallela, trovare quelle per cui PP' ha un valore d assegnato; trovare quella per cui PP' ha valore minimo. (N.3, pag. 16)

6. Data una traslazione non nulla t, quali sono gli insiemi convessi del piano che sono trasformati in sé sia da t che da –t? (N.5, pag.20)

7. Considerare il prodotto di una traslazione non nulla per una simmetria assiale con asse parallelo alla traslazione: dimostrare che è un'isometria senza punti fissi e non è una traslazione. (N.6, pag.32)

8. Considerare il prodotto di una traslazione per una simmetria assiale con asse perpendicolare alla traslazione: dimostrare che è una simmetria assiale e caratterizzarla rispetto ai dati. (N.7, pag.32)

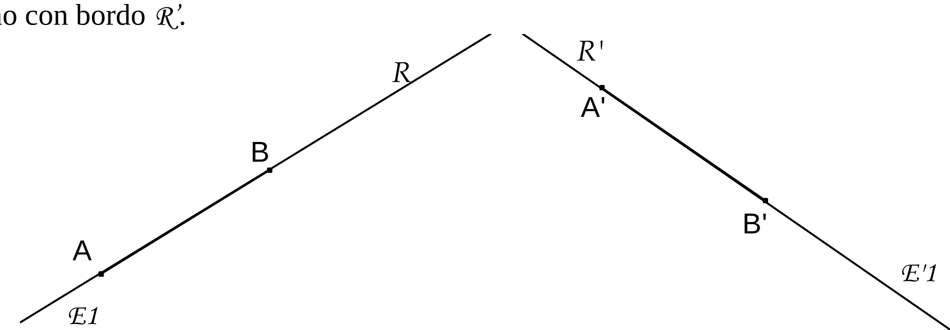
9. Se F è una figura trasformata in sè da una traslazione t non identica, allora F è una figura non limitata.

Alcune proprietà delle isometrie

Ci proponiamo di esporre alcune proprietà fondamentali delle isometrie, che si possono facilmente dedurre dalla loro definizione.
Un'isometria non solo trasforma una qualsiasi retta $\mathcal{R}$ in una retta $\mathcal{R}'$, ma trasforma un semipiano ε_1 avente come bordo $\mathcal{R}$ in un semipiano ε'_1 con bordo $\mathcal{R}'$ (e, naturalmente, trasforma il semipiano opposto ε_2 nel semipiano opposto ε_2'). Infatti, se P e Q sono punti che appartengono ad uno stesso semipiano con bordo $\mathcal{R}$, il segmento [P, Q] non taglia la retta $\mathcal{R}$; esso viene trasformato in un segmento[P', Q'] che non taglia la retta $\mathcal{R}'$; perciò P' e Q' sono, rispetto ad $\mathcal{R}'$, in uno stesso semipiano.

Il seguente **teorema** è molto importante perché ci dice da quali elementi può essere determinata un'isometria:

Vi è al più una isometria che manda due punti A, B di una retta $\mathcal{R}$ in due punti A', B' (rispettivamente) di una retta $\mathcal{R}'$ e che manda uno dei due semipiani con bordo $\mathcal{R}$ in un fissato semipiano con bordo $\mathcal{R}'$.



Supponiamo che vi siano due isometrie f, g che mandano A in A', B in B' e che mandano il semipiano ε_1 di $\mathcal{R}$ nel semipiano ε_1' di $\mathcal{R}'$. Se, per assurdo, queste isometrie non coincidono, vi è almeno un punto P che esse trasformano in modo diverso; sia $f(P) = P'$, $g(P) = P^*$ con $P' \neq P^*$ e appartenenti allo stesso semipiano. Per definizione di isometria si ha $\overline{P'A'} = \overline{P^*A'}$, essendo $\overline{P'A'} = \overline{PA}$ e $\overline{P^*A'} = \overline{PA}$.
Analogamente si ha $\overline{P^*B'} = \overline{PB}$.
Ma allora i punti A' e B' sarebbero sull'asse del segmento [P', P^*], quindi i punti P', P^* starebbero in semipiani opposti rispetto alla retta $\mathcal{R}'$, ciò che è assurdo. Dunque $f = g$.

Da questo teorema si deducono alcune importanti conseguenze:

I) Un'isometria che lascia fermi due punti A, B o è l'identità oppure è la simmetria avente come asse la retta AB.

La simmetria di asse AB scambia tra loro i due semipiani generati dalla retta AB. Per il teorema precedente, un'isometria f tale che $f(A) = A$, $f(B) = B$ o scambia tra loro i semipiani generati dalla retta AB e allora coincide con la simmetria di asse AB, o non li scambia, e allora coincide con l'identità.

II) Un'isometria che lascia fermi tre punti non allineati A, B, C è necessariamente l'identità.

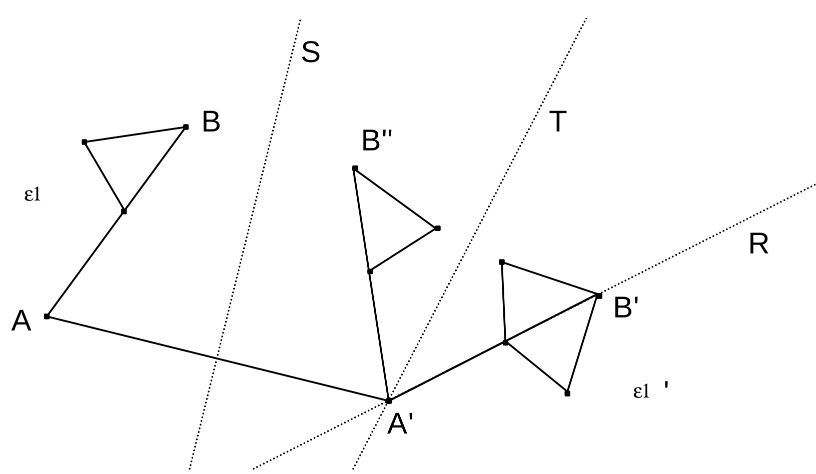
Se l'isometria f lascia fermi i punti A e B, essa è l'identità o la simmetria di asse AB . Ma poiché il punto C non sta sulla retta AB e poiché è $f(C) = C$, la f trasforma in sé il semipiano contenete il punto C. Allora per il teorema precedente essa è l'identità.

Vale il seguente risultato riguardante l'esistenza delle isometrie:

Dati due punti A, B di una retta $\mathcal{R}$ e due punti A', B' di una retta $\mathcal{R}'$ con $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ e fissato un semipiano ε_1 con bordo $\mathcal{R}$ e un semipiano ε_1' con bordo $\mathcal{R}'$, esiste un'isometria f che manda A in A', B in B' e trasforma ε_1 in ε_1'. Questa isometria si può ottenere componendo non più di tre simmetrie assiali.

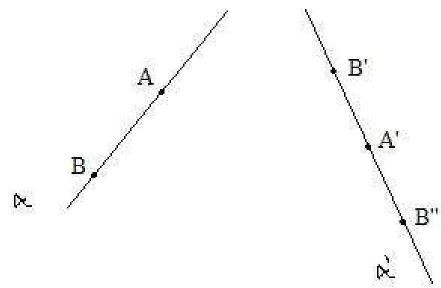
Questo teorema ci dice che per avere a disposizione tutte quelle isometrie che la nostra intuizione ci suggerisce, non occorrono altri assiomi oltre ad A7 ed A8, riguardanti l'esistenza di simmetrie assiali.

La dimostrazione può essere espressa graficamente mediante l'utilizzo di una bandierina; l'asta ha il piede in A e il drappo in B. Il drappo indica il semipiano prescelto. La dimostrazione del teorema si riduce a far vedere che, date due bandierine con l'asta di ugual lunghezza, si può portare la prima a sovrapporsi alla seconda attraverso una successione di simmetrie assiali (non più di tre).
Indichiamo con (A,B, ε_1) la prima bandierina e con (A',B', ε_1') la seconda bandierina.
La costruzione può svilupparsi in tre mosse:
<u>1ª mossa</u>: se A ≠ A' eseguiamo la simmetria assiale che scambia tra loro A ed A'; l'asse sarà la retta $\mathcal{S}$ che è asse del segmento [A, A']. Il punto B va a finire in un certo punto B''.
Se A = A' questa mossa viene saltata.
<u>2ª mossa</u>: se le semirette A'B' ed A'B'' non coincidono si fa una simmetria che porta la semiretta A'B'' a coincidere con la semiretta A'B' (rispetto alla bisettrice $\mathcal{T}$ dell'angolo che individuano).
Se le aste coincidono già questa mossa viene saltata.
<u>3ª mossa</u>: ormai le aste delle bandierine coincidono , ma può darsi che i drappi delle bandierine siano opposti. Basta allora applicare una simmetria avente come asse la retta A'B' per fare sovrapporre anche i drappi delle bandierine .
In conclusione, eseguendo la composizione $f = S_{\mathcal{R}'} \cdot S_{\mathcal{T}} \cdot S_{\mathcal{S}}$ abbiamo trasformato la bandierina (A,B, ε_1) nella bandierina (A',B', ε_1'). Pertanto f , che è un'isometria essendo composta di isometrie, manda A in A', B in B' e il semipiano ε_1 nel semipiano ε_1'. Così il teorema è dimostrato.



Esercizio svolto (N. 1, pag. 180)

Quali sono le possibili isometrie che trasformano una retta $\mathcal{R}$ in una retta $\mathcal{R}$' e che mandano un punto A di $\mathcal{R}$ in un punto A' assegnato di $\mathcal{R}$'?



Scelto un punto B qualsiasi di $\mathcal{R}$, B' deve stare su $\mathcal{R}$ ', dunque può andare in due posizioni (perché d(A,B) = d(A',B')). Poi abbiamo una doppia scelta per il semipiano: α può essere mandato sia in α' che in β'. Allora abbiamo in tutto quattro possibili isometrie.

Esercizi

1. Quali sono le possibili isometrie che scambiano fra loro due punti P e P' (con P' diverso da P)? (N.2, pag. 180)

2. Un'isometria è involutoria se e soltanto se è l'identità o è una simmetria. Dimostrarlo. (N.4, pag. 181)

3. Dati due rettangoli uguali, quante sono le isometrie che mandano il primo nel secondo?

Le rotazioni

Dato un punto O del piano, si dice **rotazione** di centro O un'isometria che lascia fisso il solo punto O. Fra le rotazioni si deve includere anche l'identità (che lascia fissi tutti i punti del piano).

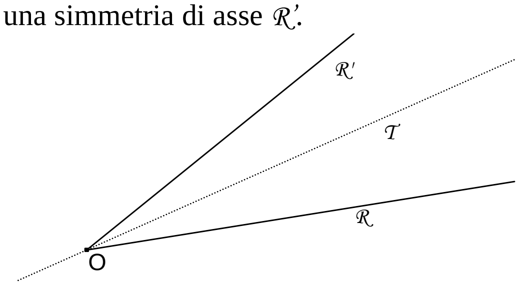
Una rotazione, come ogni isometria, si può ottenere componendo simmetrie assiali.

Il **teorema** che segue ci precisa in che modo questo si può fare :

Date due semirette $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{R}'$ con origine in O, esiste una ed una sola rotazione con centro O che porta $\mathcal{R}$ in $\mathcal{R}'$.

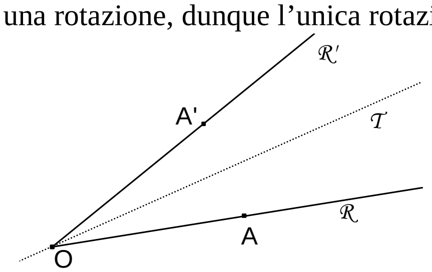
Il teorema afferma l'esistenza e l'unicità della rotazione; la dimostrazione sarà perciò divisa in due fasi:

<u>Esistenza</u> . Costruiamo una simmetria assiale che scambia tra loro le semirette $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{R}'$: è la simmetria avente come asse $\mathcal{T}$ la bisettrice dell'angolo ($\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$). Questa non è una rotazione perché lascia fermi tutti i punti di $\mathcal{T}$ e muove tutti gli altri punti del piano.
Eseguiamo successivamente una simmetria di asse $\mathcal{R}'$.



Dimostreremo che l'isometria g = $S_{\mathcal{R}'} \cdot S_{\mathcal{T}}$ è la rotazione cercata. E' evidente che $\mathcal{R}$ viene trasformata in $\mathcal{R}'$, dal momento che nella seconda simmetria $\mathcal{R}'$ non si muove. Dimostriamo che g è una rotazione.
Se $\mathcal{R} = \mathcal{R}'$ allora è $\mathcal{T} = \mathcal{R} = \mathcal{R}'$ e la g è l'identità.
Supponiamo ora che $\mathcal{R} \neq \mathcal{R}'$ e vediamo se g può avere dei punti fissi diversi da O.
Sia P = g (P) = $S_{\mathcal{R}'}(S_{\mathcal{T}}(P))$, con P $\neq$ O. Poniamo $S_{\mathcal{T}}(P) = Q$.
Allora valgono le relazioni: $S_{\mathcal{R}'}(Q) = P$, $S_{\mathcal{T}}(P) = Q$.
La prima ci dice che la retta $\mathcal{R}'$ è asse di simmetria del segmento [P,Q]; la seconda ci dice che la retta $\mathcal{T}$ è asse di simmetria del segmento [P,Q]. Poiché l'asse del segmento è unico, si ha $\mathcal{R}' = \mathcal{T}$; ma questa relazione ci dice che , essendo $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{R}'$ simmetriche rispetto a $\mathcal{T}$, deve essere $\mathcal{R} = \mathcal{R}'$, contrariamente a quanto supposto. Dunque anche nel caso $\mathcal{R} \neq \mathcal{R}'$ non ci sono punti fissi oltre O, dunque g è una rotazione.

<u>Unicità</u> . Domandiamoci se può esistere un'altra rotazione, oltre la g che abbiamo trovato, che porti $\mathcal{R}$ in $\mathcal{R}'$. Prendiamo su $\mathcal{R}$ un punto A $\neq$ O e su $\mathcal{R}'$ un punto A' tale che $\overline{OA'} = \overline{OA}$. Ogni isometria che porta $\mathcal{R}$ su $\mathcal{R}'$ lascia fermo O e porta A in A'; quante sono allora le isometrie che lasciano fermo O e portano A in A'? Sappiamo che ce ne sono due: la simmetria $S_{\mathcal{T}}$ e la rotazione $g = S_{\mathcal{R}'}\ S_{\mathcal{T}}$. Ma, come abbiamo notato, $S_{\mathcal{T}}$ non è una rotazione, dunque l'unica rotazione esistente è la g.



La dimostrazione svolta fa vedere che se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono due qualsiasi semirette con origine comune O, la composizione delle due simmetrie assiali $S_{\mathcal{A}}$ e $S_{\mathcal{B}}$ è una rotazione di centro O, che trasforma la semiretta $\mathcal{A}$ nella semiretta $\mathcal{A}'$ simmetrica di $\mathcal{A}$ in $S_{\mathcal{B}}$.

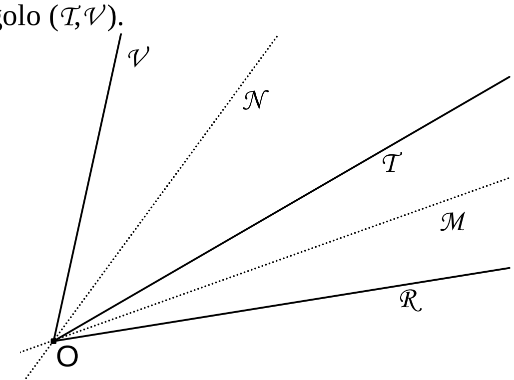
In riferimento al teorema precedente, osserviamo che mentre è unica la rotazione che porta $\mathcal{R}$ in $\mathcal{R}'$, non è unica la coppia di simmetrie che genera tale rotazione: ad esempio componendo $S_{\mathcal{R}}$ e $S_{\mathcal{T}}$ si ottiene la stessa rotazione.
Osserviamo inoltre che una simmetria centrale è una particolare rotazione.

Esaminiamo ora i legami che vi sono tra la nozione di rotazione, che ora abbiamo introdotto, e quella di angolo.
Ricordiamo che, per definizione, un angolo con vertice in O è una coppia ordinata $(\mathcal{R}, \mathcal{R}')$ di semirette con origine in O. Ad ogni angolo $(\mathcal{R}, \mathcal{R}')$ con vertice O facciamo corrispondere la rotazione con centro O che manda la semiretta $\mathcal{R}$ nella semiretta $\mathcal{R}'$.
Questa corrispondenza degli angoli con le rotazioni è suriettiva, ma non iniettiva.

Enunciamo ancora due importanti **proprietà** delle rotazioni:

I) La composizione di due rotazioni con centro O è una rotazione con centro O.

Infatti, supponiamo che la prima rotazione f mandi la semiretta $\mathcal{R}$ con origine O nella semiretta $\mathcal{T}$ e che la seconda rotazione, g, mandi la semiretta $\mathcal{T}$ nella semiretta $\mathcal{V}$.
La prima rotazione si può rappresentare così : $f = S_{\mathcal{T}} \cdot S_{\mathcal{M}}$, dove $S_{\mathcal{M}}$ è la simmetria avente come asse la bisettrice $\mathcal{M}$ dell'angolo $(\mathcal{R}, \mathcal{T})$ e $S_{\mathcal{T}}$ è la simmetria avente come asse $\mathcal{T}$.
La seconda rotazione si può rappresentare così: $g = S_{\mathcal{N}} \cdot S_{\mathcal{T}}$, dove $S_{\mathcal{N}}$ è la simmetria avente come asse la bisettrice $\mathcal{N}$ dell'angolo $(\mathcal{T}, \mathcal{V})$.



A questo punto non resta che da comporre la f con la g:

$g \cdot f = S_{\mathcal{N}} \cdot S_{\mathcal{T}} \cdot S_{\mathcal{T}} \cdot S_{\mathcal{M}} = S_{\mathcal{N}} \cdot S_{\mathcal{M}}$, ($S_{\mathcal{T}} \cdot S_{\mathcal{T}}$ è l'identità).

Dunque, essendo $g \cdot f$ prodotto di due simmetrie con assi incidenti in O, è una rotazione di centro O.

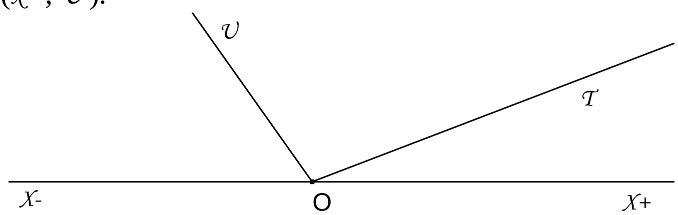
E' immediato inoltre concludere che:

II) L'inversa di una rotazione è una rotazione.

Ritorniamo alla nozione di **angolo**: all'angolo $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$ introdotto come coppia di semirette, avevamo associato una regione angolare la quale, se $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{S}$ non sono allineate, è costituita dall'intersezione del semipiano generato da $\mathcal{R}$ e contenente $\mathcal{S}$ e del semipiano generato da $\mathcal{S}$ e contenente $\mathcal{R}$.

Nel caso che $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{S}$ siano allineate (angolo piatto) vi è ambiguità: si può scegliere come regione angolare l'uno o l'altro dei due semipiani individuati dai lati.
Nello studio degli angoli ci può essere di guida l'analogia con i segmenti: un segmento [A,B] è assegnato mediante gli estremi e contiene i punti che stanno tra gli estremi; per questi punti si possono introdurre due relazioni d'ordine fra loro opposte. Inoltre per i segmenti si può introdurre una misura (o lunghezza).
Per analogia siamo portati a considerare, in un angolo ($\mathcal{R}$,$\mathcal{S}$) avente come vertice O, tutte le semirette con origine O interne all'angolo. Conviene considerare un angolo piatto ottenuto fissando un punto O su una retta χ e scegliendo uno dei due semipiani; indichiamo con χ^+ e χ^- le due semirette in cui χ viene suddivisa da O.
Possiamo ora fissare un ordinamento totale per le semirette interne all'angolo piatto con la seguente **definizione** :

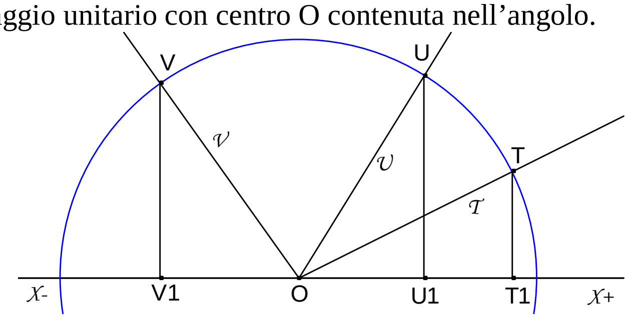
Si dice che la semiretta $\mathcal{T}$ precede la semiretta $\mathcal{U}$ (o che $\mathcal{U}$ segue $\mathcal{T}$) e si scrive $\mathcal{T} < \mathcal{U}$ se $\mathcal{T}$ è interna alla regione angolare (χ^+, $\mathcal{U}$).



Se < è una relazione d'ordine totale devono valere le seguenti proprietà[3]:

1. se $\mathcal{T} < \mathcal{U}$ allora $\mathcal{T} \neq \mathcal{U}$
2. se $\mathcal{T} < \mathcal{U}$ e $\mathcal{U} < \mathcal{V}$ allora $\mathcal{T} < \mathcal{V}$ (proprietà transitiva)
3. se $\mathcal{T} \neq \mathcal{U}$ allora $\mathcal{T} < \mathcal{U}$ oppure $\mathcal{U} < \mathcal{V}$

Le semirette dell'angolo piatto uscenti da O sono in corrispondenza biunivoca con i punti di una semicirconferenza di raggio unitario con centro O contenuta nell'angolo.



Siamo portati ad affermare che l'ordine con cui si seguono le semirette $\mathcal{T}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, … nell'angolo è quello stesso con cui si seguono le rispettive intersezioni sul semicerchio. Tuttavia non abbiamo mai parlato dell'ordinamento sul semicerchio; conviene allora proiettare ortogonalmente i punti T, U, V, … sulla retta $\mathcal{X}$ ottenendo i punti T_1, U_1, V_1, … e confrontare questi punti secondo una delle due relazioni d'ordine che abbiamo sulla retta $\mathcal{X}$.

Si può dimostrare il seguente risultato:

La relazione < introdotta per le semirette $\mathcal{T}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, … dell'angolo equivale all'analoga relazione di ordine dei punti corrispondenti T_1, U_1, V_1, …sulla retta $\mathcal{X}$ orientata nel verso $\mathcal{X}^-$. Di conseguenza valgono le proprietà 1, 2, 3.

---

[3] La relazione d'ordine è in questa forma per ricalcare la relazione d'ordine introdotta sulla retta con l'assioma A4.

Non abbiamo introdotto una relazione d’ordine per tutte le semirette uscenti da O, ma solo per quelle di un angolo piatto. E’ possibile definire in modo analogo una relazione d’ordine per le semirette dell’angolo piatto opposto, ma non è possibile saldare le due relazioni d’ordine in modo da ottenere un’unica relazione d’ordine valida per tutte le semirette uscenti da O.

Mediante la relazione d’ordine stabilita per le semirette contenute nell’angolo piatto, possiamo anche confrontare fra loro due angoli, facendo in modo che abbiano un lato coincidente con $\mathcal{X}^+$.

Continuiamo a sviluppare l’analogia fra segmenti e angoli. Per i segmenti abbiamo introdotto una misura che è basata sulla distanza e che perciò si conserva quando il segmento è sottoposto ad una trasformazione che conserva la distanza (cioè un’isometria). Occorre introdurre ora anche per gli angoli una misura che si conservi nelle isometrie.

A10 (Assioma) Esiste un’unica applicazione (detta **misura angolare)** che fa corrispondere ad ogni angolo del piano un numero reale non negativo con le seguenti proprietà:

I) La misura dell’angolo ($\mathcal{R}$,$\mathcal{S}$) è zero se e solo se è $\mathcal{R}$ =$\mathcal{S}$. La misura di un qualsiasi angolo piatto è un numero p positivo fissato.

II) Se $\mathcal{T}$ è una semiretta interna all’angolo ($\mathcal{R}$,$\mathcal{S}$), la misura dell’angolo ($\mathcal{R}$,$\mathcal{S}$) è uguale alla somma della misura dell’angolo ($\mathcal{R}$,$\mathcal{T}$) e della misura dell’angolo ($\mathcal{T}$,$\mathcal{S}$).
(proprietà dell’**additività della misura**).

III) Per ogni numero α con $0\leq \alpha \leq p$, esiste un angolo che ha misura α.
(proprietà di **suriettività della misura**).

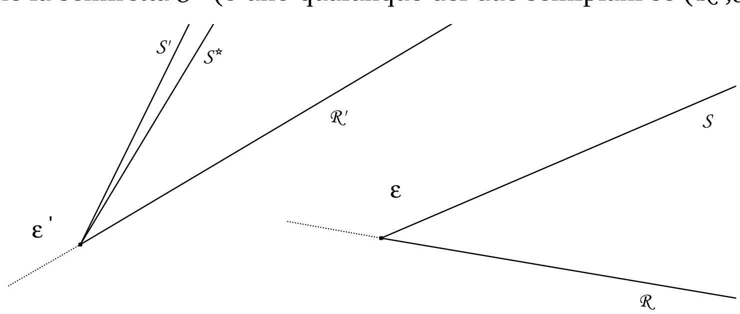
IV) Se esiste un’isometria che trasforma l’angolo ($\mathcal{R}$,$\mathcal{S}$) nell’angolo ($\mathcal{R}'$,$\mathcal{S}'$), i due angoli ($\mathcal{R}$,$\mathcal{S}$) ed ($\mathcal{R}'$,$\mathcal{S}'$) hanno la stessa misura.
(**invarianza della misura rispetto alle isometrie**).

Useremo il termine *ampiezza* come sinonimo di *misura* per gli angoli.
La misura di un angolo ($\mathcal{R}$,$\mathcal{S}$) è indicata con $<$($\mathcal{R}$,$\mathcal{S}$).

Vale un importante **teorema**:

> Due angoli ($\mathcal{R}$,$\mathcal{S}$) ed ($\mathcal{R}'$,$\mathcal{S}'$) hanno la stessa misura se e solo se esiste un’isometria che trasforma l’uno nell’altro (cioè se sono isometrici).

Il punto IV dell’assioma A10 ci dice che due angoli fra loro isometrici hanno la stessa misura. Resta perciò da dimostrare che se due angoli hanno la stessa misura sono isometrici.
Siano ($\mathcal{R}$,$\mathcal{S}$) e ($\mathcal{R}'$,$\mathcal{S}'$) due angoli di uguale misura: costruiamo un’isometria che trasforma l’uno nell’altro. All’angolo ($\mathcal{R}$,$\mathcal{S}$) associamo il semipiano ε di bordo la retta $\mathcal{R}$ e che contiene la semiretta $\mathcal{S}$. Nel caso che l’angolo ($\mathcal{R}$,$\mathcal{S}$) risulti piatto ($\mathcal{R}$ ed $\mathcal{S}$ fra loro opposte), indichiamo con ε uno qualunque dei due semipiani. Così per l’angolo ($\mathcal{R}'$, $\mathcal{S}'$): indichiamo con ε’ il semipiano di bordo la retta $\mathcal{R}'$ e che contiene la semiretta $\mathcal{S}'$ (o uno qualunque dei due semipiani se ($\mathcal{R}'$,$\mathcal{S}'$) è piatto);



ora sappiamo che esiste un'isometria f che porta $\mathcal{R}$ a coincidere con $\mathcal{R}'$ e porta il semipiano ε nel semipiano ε'. Affermiamo che questa isometria porta $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}'$; per dimostrarlo procediamo per assurdo. Indichiamo con $\mathcal{S}^*$ la semiretta trasformata di $\mathcal{S}$ e supponiamo che sia $\mathcal{S}^* \neq \mathcal{S}'$. Allora sono possibili due casi: o $\mathcal{S}^*$ è interna all'angolo ($\mathcal{R}'$, $\mathcal{S}'$) oppure $\mathcal{S}'$ è interna all'angolo ($\mathcal{R}'$, $\mathcal{S}^*$). Nel primo caso si ha $<(\mathcal{R}', \mathcal{S}') = <(\mathcal{R}', \mathcal{S}^*) + <(\mathcal{S}^*, \mathcal{S}')$.
Ma, per il punto I dell'assioma A10, risulta $<(\mathcal{S}^*, \mathcal{S}') > 0$.
Dunque $<(\mathcal{R}',\mathcal{S}')$ è maggiore $<(\mathcal{R}', \mathcal{S}^*) = <(\mathcal{R}, \mathcal{S})$, essendo isometrici gli angoli ($\mathcal{R}$,$\mathcal{S}$) e ($\mathcal{R}'$, $\mathcal{S}^*$).
Ma questa relazione è contro l'ipotesi, avendo supposto $<(\mathcal{R}',\mathcal{S}') = <(\mathcal{R}, \mathcal{S})$.
Si procede in modo analogo nell'altro caso.

Dal teorema dimostrato risulta, in particolare, che sono acuti gli angoli che hanno misura minore di p/2 e ottusi gli angoli che hanno misura maggiore di p/2.

Proprietà angolari dei poligoni

Dato un poligono convesso di n lati $A_1,\ldots,A_n$ si dice angolo **interno** l'angolo formato da due lati consecutivi.
Si dice angolo **esterno** l'angolo formato da un lato e dal prolungamento del lato consecutivo.

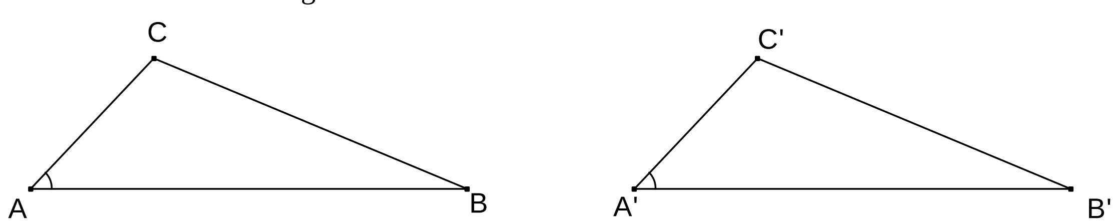
Si dice **regolare** un poligono convesso $A_1,\ldots,A_n$ tale che esista una rotazione che manda A_1 in A_2, A_2 in A_3, …, A_n in A_1. Il centro di tale rotazione è detto **centro** del poligono.

Si deduce facilmente dalla definizione che un poligono regolare ha i lati di uguale lunghezza, gli angoli interni di uguale ampiezza, è inscritto in un cerchio e ha i lati equidistanti dal centro di questo.

I criteri di congruenza dei triangoli

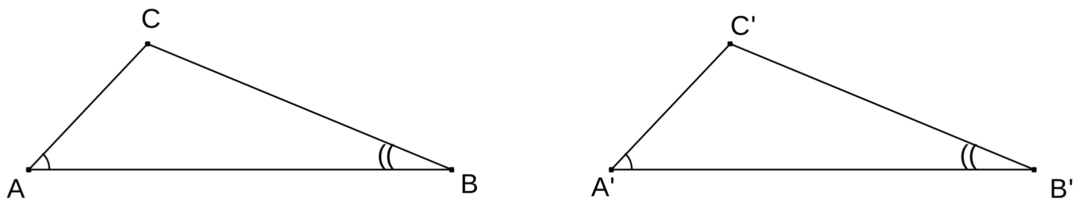
Il triangolo è la figura fondamentale della geometria euclidea ; molte delle dimostrazioni classiche sono ottenute scomponendo una figura in triangoli e mettendo questi triangoli in relazione fra loro.
Lo strumento tecnico di questo procedimento è tradizionalmente costituito dai **criteri di congruenza dei triangoli**.
Il termine "criterio" significa "condizione sufficiente": qui si tratta di trovare condizioni sufficienti perché due triangoli ABC e A'B'C' siano fra loro congruenti, cioè esista un'isometria (o congruenza) che porti A in A', B in B', C in C'. Nel nostro caso particolare, le condizioni che esporremo sono anche necessarie, cioè sono certamente soddisfatte se i due triangoli sono congruenti.

I) Due triangoli ABC e A'B'C' siano tali che <(BAC) = <(B'A'C'), $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{AC} = \overline{A'C'}$.
Allora essi sono congruenti.



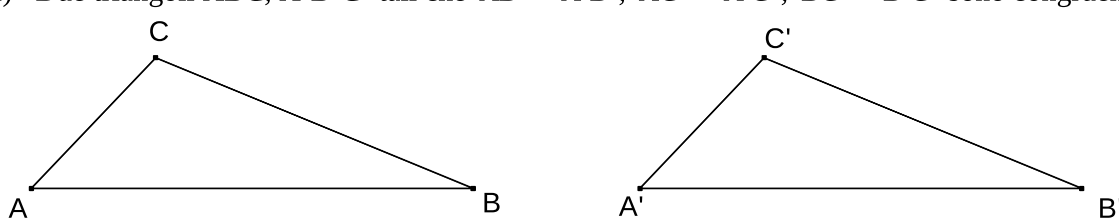
Poiché i due angoli BAC e B’A’C’ hanno uguale ampiezza, esiste un’isometria che trasforma il primo angolo nel secondo. Possiamo supporre, inoltre, che questa isometria trasformi la semiretta AB nella semiretta A’B’ e la semiretta AC nella semiretta A’C’. Poichè $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, questa isometria trasforma il punto B nel punto B’; analogamente, essendo $\overline{AC} = \overline{A'C'}$, l’isometria trasforma il punto C nel punto C’. Così abbiamo trovato un’isometria che trasforma i vertici A,B,C, ordinatamente, nei vertici A’,B’,C’ed è quello che volevamo dimostrare.

II) Due triangoli ABC e A’B’C’ siano tali che $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, <(ABC) = <(A’B’C’), <(BAC) = <(B’A’C’).
Allora i due triangoli sono congruenti.



Essendo <(ABC) = <(A’B’C’), esiste un’isometria σ che trasforma la semiretta AB nella semiretta A’B’ e la semiretta AC nella semiretta A’C’; naturalmente, essendo $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, essa trasforma il punto B nel punto B’. Analogamente , essendo <(BAC) = <(B’A’C’) , esiste un’isometria τ che trasforma la semiretta BA nella semiretta B’A’ e la semiretta BC nella semiretta B’C’; essendo $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, anche τ trasforma il punto A nel punto A’ (e, naturalmente, il punto B nel punto B’). Osserviamo che il semipiano avente per bordo la retta AB e contenente il punto C viene mandato sia dalla σ che dalla τ nel semipiano generato da A’B’contenente il punto C’. Ma sappiamo che è unica l’isometria che porta A in A’, B in B’ e un semipiano fissato in un semipiano fissato. Dunque le due isometrie coincidono: σ = τ. Questa unica isometria trasforma la semiretta AC nella semiretta A’C’, la semiretta BC nella semiretta B’C’. Allora il punto C, intersezione di AC con BC, viene trasformato nel punto C’ di intersezione di A’C’ con B’C’. In definitiva, abbiamo trovato un’isometria che porta A in A’, B in B’, C in C’.

III) Due triangoli ABC, A’B’C’ tali che $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{AC} = \overline{A'C'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ sono congruenti.



Esiste un’unica isometria che porta A in A’, B in B’e porta il semipiano (generato da AB) contenente C nel semipiano (generato da A’B’) contenente C’. Il punto C va a finire in un punto C^* tale che $\overline{AC} = \overline{A'C^*}$, $\overline{BC} = \overline{B'C^*}$.
Il punto C^* deve trovarsi nello stesso semipiano in cui si trova C’ rispetto alla retta A’B’, inoltre è $\overline{A'C^*} = \overline{A'C'}$, $\overline{B'C^*} = \overline{B'C'}$. Ma è certamente C^* = C’: infatti se fosse $C^* \neq$ C’, i punti A’,B’ dovrebbero trovarsi entrambi sull’asse del segmento [C’,C^*], quindi si troverebbero da parti opposte rispetto alla retta A’B’.

Esercizi

1. Data una rotazione di centro O mediante l'angolo (R, R') costruire graficamente la semiretta S' corrispondente ad una semiretta S assegnata con origine in O. (N.1, pag. 187)

2. Dati nel piano due segmenti di uguale lunghezza AB e A'B', esiste sempre una rotazione che manda A in A' e B in B'? (N. 2, pag. 187)

3. Dati nel piano un punto O, un punto P ≠ O ed una retta R, costruire una rotazione con centro O che porti il punto P in un punto della retta R. Vi sono sempre soluzioni? Quante? (N. 3, pag. 187)

4. Un'isometria che sia prodotto di tre simmetrie assiali con assi passanti per uno stesso punto è una simmetria assiale. (N. 4, pag. 187)

5. Dimostrare che il prodotto di due simmetrie assiali non può in nessun caso essere uguale ad una simmetria assiale. (N. 5, pag. 187)

6. Il prodotto di due rotazioni con centri diversi è una rotazione? [Rappresentare ciascuna delle due rotazioni mediante un'opportuna coppia di simmetrie assiali] (N. 6, pag. 187)

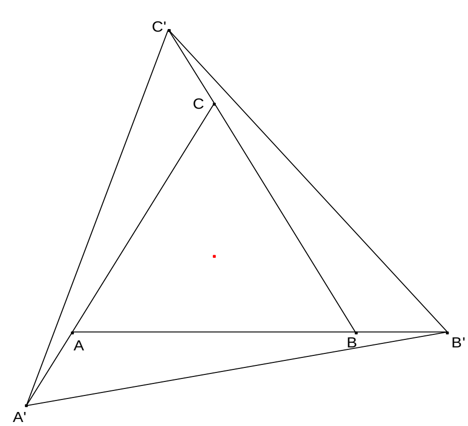
7. Dimostrare che il prodotto di quattro simmetrie assiali è in ogni caso uguale al prodotto di due simmetrie assiali. [Ricordare che anche le traslazioni si rappresentano mediante la composizione di due simmetrie assiali.] (N. 8, pag. 187)

8. Date tre semirette con la stessa origine O è sempre vero che una di esse è interna all'angolo formato dalle altre due? (N. 1, pag. 198)

9. Due quadrangoli convessi ABCD, A'B'C'D' sono tali che AB = A'B', BC = B'C', CD = C'D', DA = D'A', Â = Â'. Dimostrare che sono congruenti. L'ipotesi della convessità è essenziale? (N.1, pag. 214)

10. Due quadrangoli convessi ABCD, A'B'C'D' sono tali che AB = A'B', BC = B'C', CD = C'D', l'angolo in B uguale all'angolo in B', l'angolo in C uguale all'angolo in C'. Dimostrare che sono congruenti. (N.2, pag. 214)

11. Sia ABC un triangolo equilatero. Siano A', B', C' su AC, AB, BC rispettivamente, come nel disegno, tali che AA' = BB' = CC'. Allora A'B'C' è equilatero.



12. Un poligono convesso non può avere più di tre angoli acuti.

Le similitudini e le omotetie

Si dice **similitudine** un'applicazione biunivoca del piano in sé tale che, detti P,Q due punti qualsiasi e P',Q' i loro corrispondenti, risulta $\overline{P'Q'}$ = h $\overline{PQ}$, dove h è una costante positiva detta **rapporto di similitudine** o **scala.**

Una similitudine per cui h = 1 è un'isometria; quindi le isometrie si possono vedere come particolari similitudini.
Chiameremo similitudini proprie quelle per cui h ≠ 1.

Valgono le seguenti affermazioni:

I) la composizione di due similitudini è una similitudine ;
II) l'inversa di una similitudine è una similitudine.

Dato un punto O del piano e un numero positivo h, si dice **omotetia** di centro O e rapporto h l'applicazione così definita: ad O corrisponde O, ad un punto P ≠ O corrisponde un punto P' sulla semiretta OP tale che $\overline{OP'}$ = h $\overline{OP}$.

Dunque un'omotetia è una dilatazione (o una contrazione) del piano "a raggiera" a partire dal punto O che rimane fermo.

Si vede subito che un'omotetia è un'applicazione biunivoca.

Si dimostrano facilmente le seguenti proposizioni:

I) Un'omotetia con centro O e rapporto h si rappresenta, in un riferimento cartesiano con origine in O, con il sistema $\begin{cases} x' = hx \\ y' = hy \end{cases}$

II) Un'omotetia di rapporto h è una similitudine di rapporto h.

III) Un'omotetia trasforma ogni retta in una retta ad essa parallela e trasforma in sé ogni retta per il centro (la rappresentazione analitica dimostra facilmente la proposizione).

IV) Un'omotetia e una traslazione che mandano il punto Q nello stesso punto Q' trasformano ogni semiretta con origine in Q nella stessa semiretta con origine in Q'.

V) Un'omotetia conserva l' ampiezza degli angoli (è una conseguenza immediata della proposizione IV).

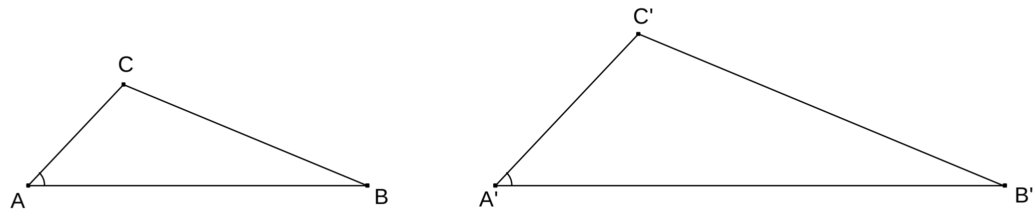
E' facile constatare che, componendo (non importa in quale ordine) un'omotetia di rapporto h con un'isometria, si ottiene una similitudine di rapporto h.

Cominceremo occupandoci di alcuni problemi particolari che riguardano il triangolo.
Premettiamo una definizione abbastanza ovvia: diciamo che due figure sono simili se esiste una similitudine che trasforma l'una nell'altra.

Valgono i seguenti **criteri di similitudine** dei triangoli:

I- (Primo criterio di similitudine dei triangoli)

Due triangoli ABC e A'B'C' tali che si abbia <(A) = <(A'), $\overline{A'B'}/\overline{AB} = \overline{A'C'}/\overline{AC}$, sono simili.



La nostra ipotesi ci suggerisce di introdurre un'omotetia g di rapporto h = $\overline{A'B'}/\overline{AB} = \overline{A'C'}/\overline{AC}$ con centro in un punto qualsiasi (ad esempio A). Il triangolo ABC viene trasformato in un triangolo AB''C'' tale che $\overline{AB''} = h\overline{AB}$, $\overline{AC''} = h\overline{AC}$. Ma allora è $\overline{AB''} = \overline{A'B'}$, $\overline{AC''} = \overline{A'C'}$, perciò il triangolo AB''C'' è congruente al triangolo A'B'C' per il primo criterio di congruenza dei triangoli. Quindi esiste un'isometria f che trasforma il triangolo AB''C'' nel triangolo A'B'C' (ordinatamente). L'applicazione $f \cdot g$ (prodotto di un'omotetia per una isometria) è una similitudine che trasforma il triangolo ABC nel triangolo A'B'C'.

II- (Secondo criterio di similitudine dei triangoli)

Due triangoli ABC e A'B'C' tali che <(A) = <(A'), <(B) = <(B'), sono simili.

III- (Terzo criterio di similitudine dei triangoli)

Due triangoli ABC e A'B'C' tali che $\overline{A'B'}/\overline{AB} = \overline{A'C'}/\overline{AC} = \overline{B'C'}/\overline{BC}$ sono simili.

Si è detto che la composizione di una omotetia di rapporto h e di una isometria è una similitudine di rapporto h. E' interessante dimostrare che vale anche il viceversa, così che si può concludere che in generale una applicazione è una similitudine se e solo se è prodotto di una omotetia e di una isometria.

Dimostriamo allora che una qualunque similitudine s si può rappresentare così:

$s = t \cdot g$, dove g è un'omotetia e t è un'isometria.

Sia assegnata una similitudine s di rapporto h; sia g una qualunque omotetia con lo stesso rapporto h. Se f è l'inversa di g, f è ovviamente un'omotetia di rapporto $\frac{1}{h}$.

Consideriamo l'applicazione $t = s \cdot f$. Si tratta di una similitudine di rapporto l, cioè un'isometria. Infine, $t \cdot g = s \cdot f \cdot g = s$.

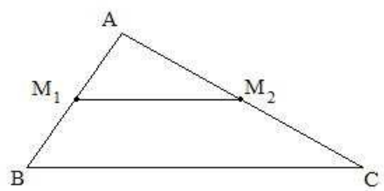
Enunciamo alcune **proprietà** delle similitudini:

I) una similitudine trasforma rette in rette, semipiani in semipiani,cerchi in cerchi e conserva la misura degli angoli;

II) il rapporto delle aree di due triangoli simili è uguale al quadrato del loro rapporto di similitudine;

Esercizio svolto (N. 5, pag. 221)

Dato un triangolo, la retta che congiunge i punti di mezzo di due lati è parallela al terzo.



Facciamo un'omotetia di centro A e h=2.
M1 → B
M2 → C
Dunque M_1M_2 // BC
Inoltre BC è lungo il doppio.

Esercizi

1. Due rette ortogonali vengono trasformate da una similitudine in rette ortogonali.
(N.3, Pag.221)

2. Due cerchi di raggi disuguali sono sempre omotetici. Dimostrarlo.
(N.4, Pag.221)

3. Due quadrati sono sempre simili fra loro.
(N.2, Pag.227)

4. Tutte le parabole sono simili fra loro.
(N.3, Pag.227)