UNIVERSITÀ DI PAVIA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE ED AMBIENTALE
Esame di Fisica Matematica
13 luglio 2015

Il ***candidato*** scriva nello spazio sottostante il proprio Cognome e Nome.

COGNOME **NOME**

La ***prova*** consta di **3** Quesiti e durerà **2** ***ore*** e **30** ***minuti***. ***Non è permesso*** consultare testi od appunti, al di fuori di quelli distribuiti dalla Commissione.

$C-O: \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 53/14 - \lambda \\ z = 27/14 + 3\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

1. *Assegnato il sistema di vettori applicati:*

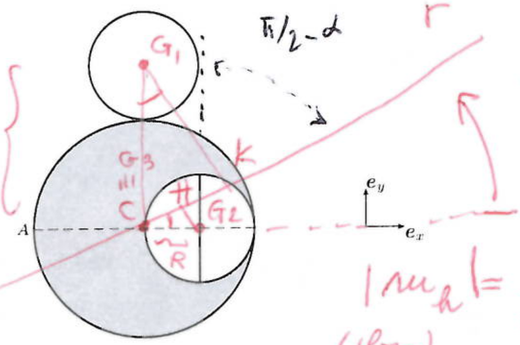
$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = 3\boldsymbol{e}_x + 4\boldsymbol{e}_y - 2\boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_1 - O \equiv (-3, 2, 1), \\ \boldsymbol{v}_2 = 3\boldsymbol{e}_x - 2\boldsymbol{e}_y + 3\boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_2 - O \equiv (1, 2, 4), \\ \boldsymbol{v}_3 = -4\boldsymbol{e}_x - 3\boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_3 - O \equiv (2, 1, -3) \end{cases}$$

determinarne $\underline{R} = 2\underline{e}_x - \underline{e}_y + 3\underline{e}_z$ $\quad \underline{M}_O = -\underline{e}_x + 14\underline{e}_y - 28\underline{e}_z$

risultante (**1** pt.); momento risultante rispetto ad O (**3** punti); il trinomio invariante (**1** punto); l'equazione dell'asse centrale (**2** punti). $\mathcal{I} = -100$

2. *Un corpo rigido piano è formato da un disco di massa $4m$ e raggio $2R$ da cui viene asportato un disco di raggio R, tangente intrernamente al primo; da un'asta verticale di massa $2m$, sovrapposta ad un diametro del disco asportato; da un anello di raggio R e massa $5m$, tangente al disco di partenza nel punto di quota massima. Determinare le matrici di inerzia del disco forato, dell'asta e dell'anello rispetto al punto A*

$\sin\alpha = \frac{3}{5} \Downarrow \cos\alpha = \frac{4}{5} \left(= \sqrt{1-\sin^2\alpha}\right)$ $\quad 3R$



$d_1 = \overline{G_1K} = 3R\cos\alpha = \frac{12}{5}R$

$d_2 = \overline{G_2H} = R\sin\alpha = \frac{3}{5}R$

$\underline{e}_{G_1} = \frac{2\underline{e}_x + 3\underline{e}_y}{\sqrt{13}}$

$|m_h| = \frac{4m}{\pi \cdot 4R^2} \cdot \pi R^2 = m$ (foro)

sull'orizzontale passante per il centro del disco (**9** *punti*). *Determinare il momento di inerzia rispetto all'asse passante per il centro del disco di raggio $2R$ e che forma un angolo α tale che $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ con l'orizzontale.* (**5** *punti*)

disco forato $\underset{\sim}{I}_A^{df} = \frac{1}{4} 4m (2R)^2 (\underset{\sim}{1} + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) + 4m\, 4R^2 (\underset{\sim}{1} - \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x) - \left[\frac{1}{4} m R^2 (\underset{\sim}{1} + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) + 9mR^2 (\underset{\sim}{1} - \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x)\right]$

anello $\underset{\sim}{I}_A^{an} = \frac{1}{2} 5mR^2 (\underset{\sim}{1} + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) + 5 \cdot 13\, mR^2 (\underset{\sim}{1} - \underline{e}_{G_1} \otimes \underline{e}_{G_1})$

asta $\underset{\sim}{I}_A^{a} = \frac{1}{12} 2m\, 4R^2 (\underset{\sim}{1} - \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) + 2m\, 9R^2 (\underset{\sim}{1} - \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x)$

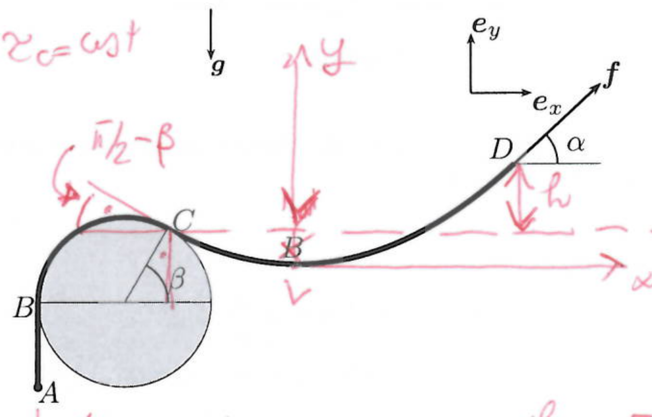
$$\frac{\left[\underset{\sim}{I}_A^{dh}\right]}{mR^2} = \begin{pmatrix} \frac{15}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{63}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{29}{2} \end{pmatrix} \qquad \frac{\underset{\sim}{I}_A^{dm}}{mR^2} = \begin{pmatrix} \frac{95}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{95}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 70 \end{pmatrix} \qquad \frac{\left[\underset{\sim}{I}_A^{asta}\right]}{mR^2} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{56}{3} \end{pmatrix}$$

3. *In un piano verticale, un filo omogeneo AD di peso per unità di lunghezza costante $2p/R$ e lunghezza opportuna ha il tratto CD libero e mantenuto teso ad una forza di intensità $f = 5p$, applicata in D, formante un angolo α con l'orizzontale, tale che $\sin\alpha = \frac{3}{5}$. Nel punto C il filo tocca un disco fisso di centro O e raggio R, in modo che il raggio OC formi un angolo $\beta = \frac{\pi}{3}$ con l'orizzontale. Il tratto appoggiato termina nel punto B ed il tratto libero AB di lunghezza R è mantenuto in equilibrio applicando un peso opportuno in A. Determinare: l'equazione dell'arco libero CD, riferito ad assi centrati nel vertice dell'arco stesso* (**2** *punti*)*; il dislivello tra i punti B e C* (**4** *punti*)*; il valore del peso applicato in A* (**3** *punti*)*.*

$\tau = v + \text{cost} \rightarrow \tau_C = \text{cost}$

$\tau_D = \tau_C + \frac{2p}{R} \cdot h$

$\tau_B = \tau_C - R\sin\beta$



$y = 2R\left(\cosh\frac{x}{2R} - 1\right)$

$h = \frac{R}{2}\left(5 - \frac{8}{3}\sqrt{3}\right)$

$v = 0$

$p_A = \left(\frac{5}{3}\sqrt{3} - 2\right)p$

$f_A = -p_A e_y$

$f_x = 5p\cos\alpha = \tau_x = \phi = \tau_C \cdot \cos\frac{\pi}{6}$

I termini della matrice si possono calcolare "direttamente"

Conviene il calcolo diretto anche per I_O^r (vd figura)

$$I_C^r = \frac{1}{4}4m\,4R^2 + \left(\frac{1}{12}2m\,4R^2\underbrace{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}_{\cos^2\alpha} + 2m\,d_2^2\right) +$$

$$+\left(\frac{1}{2}5mR^2 + 5m\,d_1^2\right) - \left(\frac{1}{4}mR^2 + m\,d_2^2\right) =$$

$$= \frac{10\cdot 751}{300}mR^2$$