(a)

Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale/per l'Ambiente e il Territorio
Esame di Fisica Matematica
13 luglio 2017

Il ***candidato*** scriva nello spazio sottostante il proprio Cognome e Nome.

COGNOME **NOME**

La ***prova*** consta di **3** esercizi e durerà **2 *ore*** e **30 *minuti***. ***Non è permesso*** usare né calcolatrice né telefono cellulare/smartphone/altri strumenti elettronici; non è consentito consultare testi o appunti, al di fuori di quelli eventualmente distribuiti dalla Commissione pena l'esclusione dalla prova.

Esercizi

1. *Un corpo rigido piano è composto da una lamina rettangolare omogenea $ABCD$, con lati $AB = 2\sqrt{3}R$ e $BC = 2R$ e massa $4m$; una lamina circolare omogenea centrata in G di raggio R e massa $6m$ tangente esternamente nel punto medio M del lato AD; un'asta omogenea di lunghezza $2R$ e massa $3m$, inclinata di un angolo $\alpha = \pi/6$ rispetto alla direzione AB e saldata lungo il diametro EF del disco (con F più vicino di E al lato AD: vd. figura). Utilizzando la base ortonormale $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ con $\mathbf{e}_x$ parallelo ad AB, ed $\mathbf{e}_y$ nel piano, determinare:*

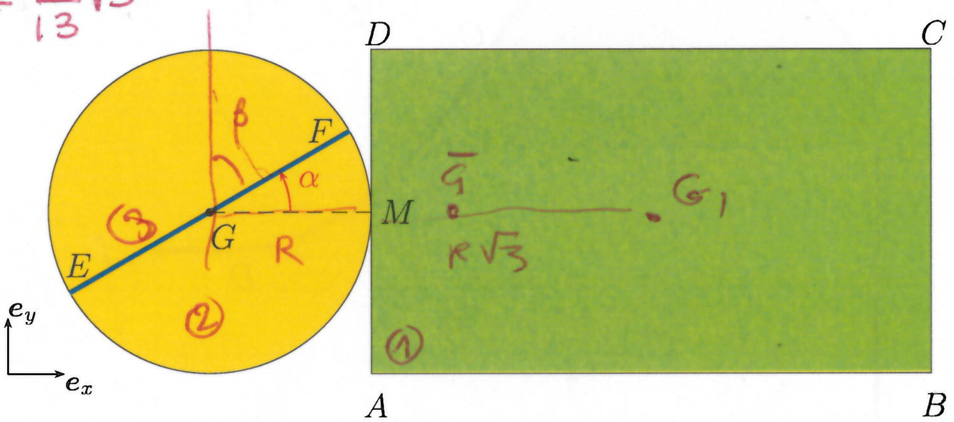
1. *gli elementi I_{xx}, I_{yy} e I_{xy} della matrice di inerzia, calcolata rispetto ad A*
   (a) *del disco (**2 pt**),*
   (b) *della lamina rettangolare (**3 pt**),*
   (c) *dell'asta (**4 pt**);*
2. *il momento **centrale** di inerzia del corpo rispetto alla direzione di $\mathbf{e}_y$ (**3 pt**).*

$\mathbb{I}$ d disco $\begin{pmatrix} 15/2 & 6 \\ 6 & 15/2 \end{pmatrix}$

l rettangolo $\begin{pmatrix} 16/3 & -4\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} & 16 \end{pmatrix}$

a asta $\begin{pmatrix} 13/10 & -\frac{1}{4}\sqrt{3}+3 \\ -\frac{1}{4}\sqrt{3}+3 & \frac{15}{4} \end{pmatrix}$

$\frac{901}{52} + \frac{72}{13}\sqrt{3}$



$\beta = \frac{\pi}{3}$

$\sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$d^2 = (1+3+2\sqrt{3})R^2$

$d = (1+\sqrt{3})R$

$\mu = \frac{4\cdot(9)}{4+9} = \frac{36}{13}$

$\frac{26}{3}$
$\frac{144}{4}$
576
208
78
39
901

$\underset{\sim}{I}^t_G = \left(\underset{\sim}{I}^{(1)}_{G_1}\right) + \left(I^{(2)}_G + I^{(3)}_G\right) + \mu d^2 \left(\underset{\sim}{\mathbb{1}} - \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x\right)$

$(I^t_G)_{44} = \frac{1}{\cancel{12}} 4m \cdot \cancel{4}\,3R^2 + \frac{1}{\cancel{24}} \overset{3}{\cancel{6}} m R^2 + \frac{1}{\cancel{12}} \cancel{3} m \cancel{4} R^2 \cdot \frac{3}{4} + \frac{36}{13}(4+2\sqrt{3})R^2$

$4 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{144}{13} + \frac{72}{13}\sqrt{3} = \frac{208+78+39+576}{52} + \frac{72}{13}\sqrt{3} = \frac{901}{52} + \frac{72}{13}\sqrt{3}$

2. *Calcolare per il seguente sistema di vettori applicati:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_1 - O \equiv (1,1,1), \\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_2 - O \equiv (0,1,2), \\ \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y + 3\boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_3 - O \equiv (1,-1,0)\,, \end{cases}$$

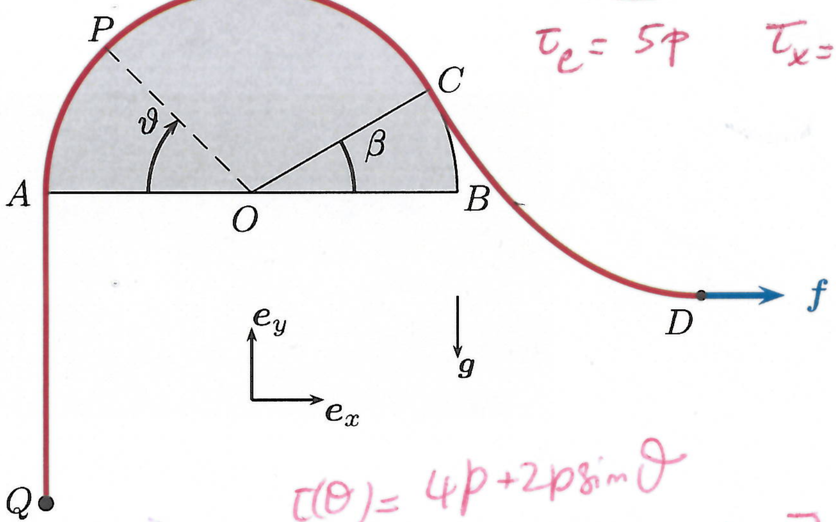
1. *il momento risultante del sistema* (**2 pt**); $-3\underline{e}_x - 2\underline{e}_y$
2. *il trinomio invariante del sistema* (**2 pt**); -13
3. *l'equazione dell'asse centrale del sistema* (**2 pt**); $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/29 \\ -12/29 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

3. *In un piano verticale, un filo omogeneo QD di peso per unità di lunghezza costante $2p/R$ e lunghezza opportuna ha il tratto AQ, di lunghezza $3R/2$ libero con un contrappeso p applicato in Q; il tratto AC appoggiato senza attrito ad un supporto semicircolare fisso di diametro AB e centro O orizzontale, in modo che il raggio OC formi un angolo $\beta = \pi/6$ con l'orizzontale; infine, il tratto CD è mantenuto teso grazie ad una forza $\boldsymbol{f} = f\boldsymbol{e}_x$ orizzontale ($f > 0$). In condizioni di equilibrio, determinare:*

1. *la tensione $\tau(\vartheta)$ del filo nel generico punto P del tratto AC, in funzione dell'angolo ϑ che OP forma con l'orizzontale* (**2 pt**); $4p + 2p\sin\theta$
2. *l'equazione dell'arco libero CD, riferito ad assi orizzontali e verticali centrati in D* (**3 pt**); $y(x) = \frac{5}{4}R \cdot \left[\cosh\left(\frac{4x}{5R}\right) - 1\right]$ $\quad \tau_A = 4p$
3. *il modulo f della forza $\boldsymbol{f}$ applicata in D per garantire l'equilibrio* (**1 pt**); $\varphi = \frac{5}{2}p$
4. *il dislivello tra i punti C e D* (**2 pt**); $\frac{5}{4}R = h$ $\quad \alpha = 2 \quad \beta = 1$
5. *la lunghezza dell'arco CD* (**4 pt**). $\frac{5}{4}\sqrt{3}R$

$\boxed{\tau(\theta) = 4p + 2p\sin\theta}$

$\tau_C = 5p \quad \tau_x = \frac{5}{2}p$



$\tau(\theta) = 4p + 2p\sin\theta$

$y(x) = \frac{5}{4}R\left[\cosh\left(\frac{4x}{5R}\right) - 1\right]$

$f = \frac{5}{2}p$

$h = \frac{5}{4}R$

$\ell = \frac{5}{4}\sqrt{3}R$