+2/1/58+

**Geometria e Algebra** 15 frimaio CCXXVIII RF (seconda decade, quintidì)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| [X] 0 | [ ] 0 | [ ] 0 | [ ] 0 | [ ] 0 | [ ] 0 |
| [ ] 1 | [X] 1 | [ ] 1 | [ ] 1 | [ ] 1 | [ ] 1 |
| [ ] 2 | [ ] 2 | [X] 2 | [ ] 2 | [ ] 2 | [ ] 2 |
| [ ] 3 | [ ] 3 | [ ] 3 | [X] 3 | [ ] 3 | [ ] 3 |
| [ ] 4 | [ ] 4 | [ ] 4 | [ ] 4 | [X] 4 | [ ] 4 |
| [ ] 5 | [ ] 5 | [ ] 5 | [ ] 5 | [ ] 5 | [X] 5 |
| [ ] 6 | [ ] 6 | [ ] 6 | [ ] 6 | [ ] 6 | [ ] 6 |
| [ ] 7 | [ ] 7 | [ ] 7 | [ ] 7 | [ ] 7 | [ ] 7 |
| [ ] 8 | [ ] 8 | [ ] 8 | [ ] 8 | [ ] 8 | [ ] 8 |
| [ ] 9 | [ ] 9 | [ ] 9 | [ ] 9 | [ ] 9 | [ ] 9 |

⟵ Annerire le caselle per comporre il proprio numero di matricola. Durata: 1 ora. Vietato l'uso di appunti, libri, strumenti elettronici di calcolo e/o comunicazione (cell, smartphone, ...). Le domande con il segno ♣ possono avere una o più risposte corrette. Risposte *gravemente* errate possono ottenere punteggi negativi.

Cognome e Nome:

COOPER

SHELDON

[Usare solo colore nero o blu]

---

**Domanda 1** Dare la **definizione** di lista di vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale $V$. Fornire un esempio di una lista di 3 vettori $\{v_1, v_2, v_3\}$ in $\mathbb{R}^4$ tali che $\{v_1, v_2\}$ siano indipendenti, ma $\{v_1, v_2, v_3\}$ siano dipendenti.

[ ] w [ ] p [ ] a [ ] c

$\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \dots \underline{v}_n\}$ linearm. indipend. se nessun vettore della lista è comb. lineare degli altri. Ossia $\underline{v}_1 \notin \text{Span}(\underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4, \dots, \underline{v}_n)$
$\underline{v}_2 \notin \text{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_3, \underline{v}_4, \dots, \underline{v}_n)$;
$\underline{v}_3 \notin \text{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_4, \dots, \underline{v}_n)$ ecc.
Equiv. $\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n = \underline{0}_V \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

Es. $\left\{ \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

**Domanda 2** Assegnati i vettori $u_1, u_2, u_3$ in uno spazio vettoriale reale $\mathcal{V}$, dare la **definizione** di $S = \text{Span}(u_1, u_2, u_3)$ e mostrare che $S$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{V}$.

[ ] w [ ] p [ ] a [ ] c

$S = \{ \underline{v} \in \mathcal{V} : \underline{v} = \alpha_1 \underline{u}_1 + \alpha_2 \underline{u}_2 + \alpha_3 \underline{u}_3 \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \}$
Ossia: l'insieme di tutte le C.L. dei vett. $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$
$P_0$) con $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \quad \underline{v} = \underline{0}$ : $\underline{0} \in S$
$P_1$) $\forall\ \underline{v}, \underline{w} \in S$: $\exists\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ t.c. $\underline{v} = \alpha_1 \underline{u}_1 + \alpha_2 \underline{u}_2 + \alpha_3 \underline{u}_3$
$\underline{w} = \beta_1 \underline{u}_1 + \beta_2 \underline{u}_2 + \beta_3 \underline{u}_3 \cdot \underline{v} + \underline{w} = (\alpha_1 + \beta_1) \underline{u}_1 + (\alpha_2 + \beta_2) \underline{u}_2 + (\alpha_3 + \beta_3) \underline{u}_3$
Quindi $\underline{v} + \underline{w} \in S$. (è una C.L. di $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$)
$P_2$) $\forall \lambda$, $\forall \underline{v} \in S$ come sopra $\lambda \underline{v} = (\lambda \alpha_1) \underline{u}_1 + (\lambda \alpha_2) \underline{u}_2 + (\lambda \alpha_3) \underline{u}_3$
Quindi $\lambda \underline{v} \in S$. (è una C.L. di $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$)

**Domanda 3** Quale delle seguenti rette è ortogonale al piano $\pi$: $x - y + z = 0$?

[ ] $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$ [ ] $\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$ [X] $\begin{cases} y + z = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$ [ ] $\begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

**Domanda 4** Quale fra le seguenti affermazioni è corretta se si considera la seguente base di $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{B} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$, e $u \in \mathbb{R}^3$ è tale che $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$?

- ☒ $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$
- ☐ $u = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- ☐ $u \in \mathrm{Span}(v_2, v_3)$
- ☐ non è possibile determinare $u$.

**Domanda 5 ♣** Si supponga che $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n$ siano soluzioni di un sistema lineare *non* omogeneo $AX = B$ assegnato. Stabilire quali delle seguenti affermazioni è possibile dedurre con certezza:

- ☒ Se $\operatorname{rg} A < n$, allora è possibile che sia $X_1 \neq X_2$
- (*) ☒ $X_1 + 2X_2$ è soluzione del sistema $AX = 3B$
- ☑ Il vettore $X_1$ non appartiene a $\operatorname{Ker} A$
- ☐ $2X_1 - X_2$ è soluzione del sistema omogeneo $AX = 0$

**Domanda 6 ♣** Siano $U$ e $V$ sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$; sia $\dim U = 2$ e $\dim V = 4$. Sapendo $U$ che **non è contenuto** in $V$, quali delle seguenti affermazioni sono **necessariamente** corrette?

- ☐ $U$ e $V$ sono complementari.
- ☐ $\dim(U + V) = 4$.
- ☒ $\dim(U \cap V) = 1$.
- ☒ $U + V = \mathbb{R}^5$

**Domanda 7 ♣** Sia $A$ una matrice quadrata $3 \times 3$; sapendo che $\det A = -3$, dire quali delle seguenti affermazioni è corretta:

- ☐ $\det A^{\mathsf{T}} = 3$.
- ☒ $\det 2A = -24$.
- ☐ $\det A^{-1} = \frac{1}{3}$.
- ☐ $\det A^3 = -9$.

**Domanda 8 ♣** Sia $A$ una matrice $3 \times 3$ e siano $A^1, A^2, A^3$ le colonne di $A$. Se $\det A = 1$, quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- ☒ $\{A^1, A^2, A^3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
- ☒ La matrice $(2A^1|A^2|A^3)$ è invertibile.
- ☐ I vettori $\{2A^1, 3A^2, 2A^3\}$ sono linearmente dipendenti.
- ☐ $\det(3A^1|A^2|-2A^3) = 0$.

Questo spazio è utilizzabile per le risposte alle domande aperte

(*) N.B. ⊡ ☒ ▦ ☑

vanno tutti bene.

→ Adottare lo stesso segno in tutti i riquadri.

(Cioè solo ⊡ oppure solo ▥ ecc.)