

UNIVERSITÀ DI PAVIA  
FACOLTÀ DI INGEGNERIA  
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE E AMBIENTALE/PER L'AMBIENTE E IL TERRITORIO  
**Esame di Fisica Matematica**  
19 febbraio 2019

Il *candidato* scriva nello spazio sottostante il proprio Cognome e Nome.

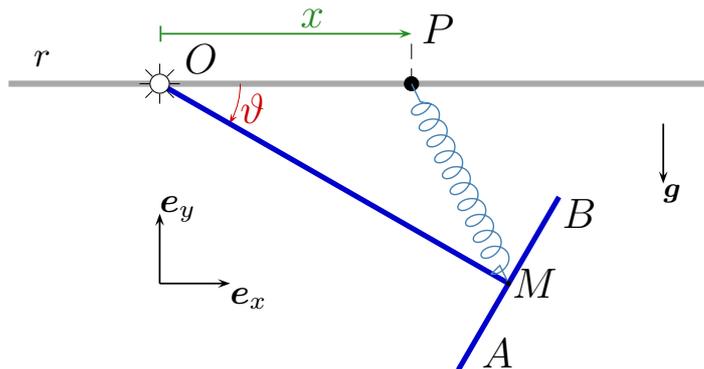
COGNOME

NOME

La *prova* consta di **2** esercizi e durerà **2 ore** e **30 minuti**. *Non è permesso* usare né calcolatrice né telefono cellulare/smartphone/altri strumenti elettronici; non è consentito consultare testi o appunti, al di fuori di quelli eventualmente distribuiti dalla Commissione pena l'esclusione dalla prova.

1. In un piano verticale, un punto materiale  $P$  di massa  $2m$  è vincolato a muoversi senza attrito lungo una guida fissa orizzontale  $r$  passante per un punto  $O$  fisso; un'asta  $OM$  di lunghezza  $4\ell$  e massa  $8m$  è incernierata nel punto  $O$ ; una seconda asta  $AB$  di lunghezza  $2\ell$  e uguale massa è saldata a 'T' alla prima nel proprio punto medio coincidente con  $M$  (vd. figura). Una molla ideale con lunghezza a riposo nulla e costante elastica  $k = \gamma \frac{mg}{\ell}$  attrae  $M$  verso  $P$ . Usando come coordinate lagrangiane l'ascissa  $x$  di  $P$  lungo  $r$  a partire da  $O$  e l'angolo  $\vartheta$  che l'asta forma con l'orizzontale, contato positivamente in senso orario, si determini:

1. l'energia cinetica  $T(x, \vartheta, \dot{x}, \dot{\vartheta})$  del sistema (**2 pt**);
2. l'energia potenziale  $V(x, \vartheta)$  del sistema; (**2 pt**);
3. la/le configurazioni di equilibrio del sistema (**2 pt**);
4. la stabilità della/e configurazioni di equilibrio trovate al variare di  $\gamma$ ; (**3 pt**).
5. **posto**  $\gamma = 1$ , la frequenza dei modi normali oscillanti attorno alla configurazione di equilibrio stabile (**3 pt**).



2. Un corpo rigido piano è formato da un **disco** omogeneo centrato in  $A$  di raggio  $R$  e massa  $4m$ , un **anello** omogeneo centrato in  $C$  di raggio  $3R$  e massa  $2m$ , saldato tangenzialmente all'esterno del disco nel punto  $O$  e da un'asta omogenea  $AB$  di massa  $3m$ , avente l'estremo  $B$  posto sull'anello, sulla retta ortogonale ad  $AC$  passante per  $C$ . Rispetto alla base  $\{e_x, e_y, e_z\}$ , il cui versore  $e_x$  è diretto come  $O - A$  ed  $e_y$  è ortogonale a esso, in modo che  $(B - A) \cdot e_y > 0$  (vd. figura) determinare:

1. gli elementi  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$  e  $I_{xy}$  della matrice di inerzia, calcolata rispetto a  $O$

(a) della disco centrato in  $A$  (**2 pt**);

(b) dell'anello centrato in  $C$  (**2 pt**);

(c) dell'asta  $AB$  (**4 pt**);

2. il momento di inerzia di tutto il corpo rispetto alla retta passante per  $O$  e ortogonale all'asta, indicando separatamente i contributi dei tre componenti (**4 pt**).

