Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale/per l'Ambiente e il Territorio
Esame di Fisica Matematica
21 febbraio 2018

Il ***candidato*** scriva nello spazio sottostante il proprio Cognome e Nome.

COGNOME **NOME**

La ***prova*** consta di **3** esercizi e durerà **2 *ore*** e **30 *minuti***. ***Non è permesso*** usare né calcolatrice né telefono cellulare/smartphone/altri strumenti elettronici; non è consentito consultare testi o appunti, al di fuori di quelli eventualmente distribuiti dalla Commissione pena l'esclusione dalla prova.

Esercizi

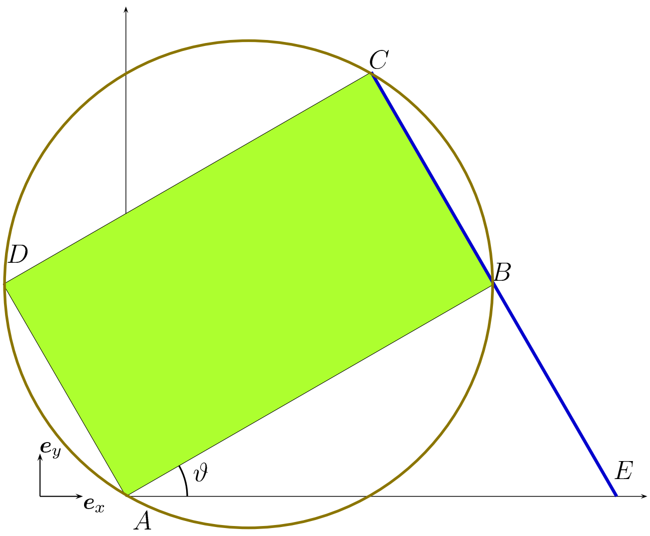
1. *Un corpo rigido piano è composto da una lamina rettangolare omogenea $ABCD$, con lati $AB = 2\sqrt{3}R$ e $BC = 2R$ e massa $4m$; un'asta omogenea CE saldata lungo CB, di lunghezza $4R$ e massa m; un* **anello** *circolare omogeneo di raggio $2R$ e massa $3m$ saldato ai vertici di $ABCD$. Utilizzando la base ortonormale $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z\}$ con $\boldsymbol{e}_x$ parallelo a $E - A$, ed $\boldsymbol{e}_y$ ortogonale ad AE (vd. figura), e sapendo che i vettori $B - A$ e $D - A$ formano un angolo $\vartheta = \frac{\pi}{6}$ con $\boldsymbol{e}_x$ ed $\boldsymbol{e}_y$, rispettivamente, determinare:*

1. *gli elementi I_{xx}, I_{yy} e I_{xy} della matrice di inerzia, calcolata rispetto ad A*
   (a) *della lamina rettangolare (**3 pt**), $I_{xx} = 14mR^2$, $I_{yy} = \frac{22}{3}mR^2$, $I_{xy} = -\frac{14}{3}\sqrt{3}mR^2$;*
   (b) *dell'asta (**3 pt**); $I_{xx} = 4mR^2$, $I_{yy} = \frac{28}{3}mR^2$, $I_{xy} = -\frac{8}{3}\sqrt{3}mR^2$;*
   (c) *dell'anello (**3 pt**), $I_{xx} = 15mR^2$, $I_{yy} = 9mR^2$, $I_{xy} = -3\sqrt{3}mR^2$;*
2. *il momento di inerzia del corpo rispetto alla diagonale AC, indicando anche i contributi dei tre corpi separatamente(**3 pt**). $I_{AC} = (2 + 4 + 6)mR^2 = 12mR^2$.*

2. *Calcolare per il seguente sistema di vettori applicati:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_1 - O \equiv (1,1,1), \\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_2 - O \equiv (0,1,1), \\ \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_3 - O \equiv (1,1,0)\,, \end{cases}$$

1. *il momento risultante del sistema rispetto al polo O(**2 pt**); $M_O = 4\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y - 3\boldsymbol{e}_z$;*
2. *il trinomio invariante del sistema (**2 pt**); $\mathscr{I} = 1$;*
3. *l'equazione dell'asse centrale del sistema (**2 pt**); $C - O\colon \begin{cases} x = \frac{7}{26} + 3t \\ y = \frac{25}{26} - t \\ z = \frac{1}{26} + 4t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$*



3. *In un piano verticale, un disco omogeneo di massa $3m$ e raggio R è vincolato a rotolare senza strisciare lungo una guida fissa orizzontale o passante per un punto O; un punto materiale Q di massa m può muoversi senza attrito lungo una guida fissa rettilinea r passante per O e inclinata verso il basso di un angolo $\theta_0 = \frac{\pi}{6}$ rispetto all'orizzontale. Una molla ideale con lunghezza a riposo nulla e costante elastica $k = 2\frac{mg}{R}$ attrae Q verso il centro C del disco. Usando come coordinate lagrangiane le ascisse x di C lungo o e s di Q lungo r, a partire da O si determini:*

1. *l'energia cinetica $T(x, s, \dot{x}, \dot{s})$ del sistema (**2 pt**);* $T = \frac{9}{4}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{s}^2$;
2. *l'energia potenziale $V(x, s)$ del sistema; (**3 pt**);* $V = -mg\frac{s}{2} + \frac{mg}{R}(x^2 + s^2 + Rs - \sqrt{3}xs)$;
3. *la/le configurazioni di equilibrio del sistema (**3 pt**);* $x_{eq} = -\frac{\sqrt{3}}{2}R$, $s_{eq} = -R$;
4. *la frequenza dei modi normali oscillanti attorno alla configurazione di equilibrio stabile (**4 pt**).* $\omega_{1,2} = \frac{1}{3}\sqrt{11 \pm \sqrt{103}}\sqrt{\frac{g}{R}}$.