

UNIVERSITÀ DI PAVIA  
FACOLTÀ DI INGEGNERIA  
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE E AMBIENTALE/PER L'AMBIENTE E IL TERRITORIO  
**Esame di Fisica Matematica**  
21 giugno 2017

Il *candidato* scriva nello spazio sottostante il proprio Cognome e Nome.

COGNOME

NOME

La *prova* consta di **3** esercizi e durerà **2 ore** e **30 minuti**. *Non è permesso* usare né calcolatrice né telefono cellulare/smartphone/altri strumenti elettronici; non è consentito consultare testi o appunti, al di fuori di quelli eventualmente distribuiti dalla Commissione pena l'esclusione dalla prova.

**Esercizi**

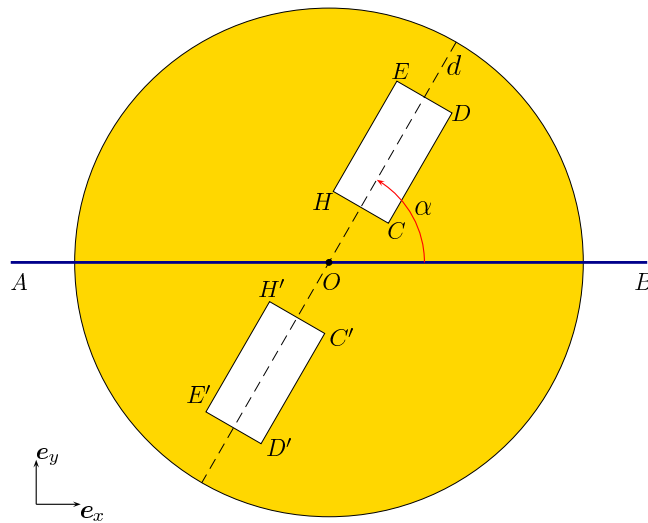
1. (6pt) Calcolare per il seguente sistema di vettori applicati:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_x - 2\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z & \text{applicato in } P_1 - O \equiv (1, 0, 1), \\ \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z & \text{applicato in } P_2 - O \equiv (0, 1, 1), \\ \mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z & \text{applicato in } P_3 - O \equiv (1, 1, 0), \end{cases}$$

1. il momento risultante del sistema;
2. il trinomio invariante del sistema;
3. l'equazione dell'asse centrale del sistema;

2. (12pt) Un corpo rigido piano è ottenuto unendo ad una lamina circolare omogenea centrata in  $O$  di raggio  $4R$ , e massa  $4\pi m$ , un'asta omogenea  $AB$  di lunghezza  $10R$ , e massa  $6m$ , sempre centrata in  $O$ . Dalla lamina vengono asportati due rettangoli  $CDEH$  e  $C'D'E'H'$ , con lati  $CD = C'D' = 2R$  e  $CH = C'H' = R$ , disposti in modo che il diametro  $d$  inclinato di un angolo  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  rispetto ad  $AB$ , sia l'asse dei lati  $CH$  e  $C'H'$ , distanti  $R$  da  $O$ . Utilizzando la base ortonormale  $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$  con  $\mathbf{e}_x$  parallelo ad  $AB$ , ed  $\mathbf{e}_y$  nel piano, calcolare:

1. Gli elementi  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$  e  $I_{xy}$  della matrice di inerzia calcolata rispetto a  $O$ 
  - (a) del disco pieno,
  - (b) dei fori rettangolari (ossia delle masse asportate),
  - (c) dell'asta;
2. il momento di inerzia del corpo rispetto all'asse centrale ortogonale a  $d$ , nel piano.



**3. (12pt)** In un piano verticale, un punto materiale  $Q$  di massa  $2m$  può muoversi senza attrito lungo una guida fissa orizzontale  $o$  passante per un punto  $O$ ; un disco omogeneo di massa  $m$  e raggio  $R$  è vincolato a rotolare senza strisciare lungo una guida fissa rettilinea  $r$  passante per  $O$  e inclinata di un angolo  $\theta_0 = \frac{\pi}{6}$  rispetto all'orizzontale. Una molla ideale con lunghezza a riposo nulla e costante elastica  $k = 2\frac{mg}{R}$  attrae  $Q$  verso il centro  $C$  del disco. Usando come coordinate lagrangiane le ascisse  $x$  di  $Q$  lungo  $o$  e  $s$  di  $C$  lungo  $r$ , a partire da  $O$  si determini:

1. l'energia cinetica  $T(x, s, \dot{x}, \dot{s})$  del sistema;
2. l'energia potenziale  $V(x, s)$  del sistema;
3. la/le configurazioni di equilibrio del sistema;
4. la frequenza dei modi normali oscillanti attorno alla configurazione di equilibrio stabile.

