(a)

UNIVERSITÀ DI PAVIA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE E AMBIENTALE/PER L'AMBIENTE E IL TERRITORIO
Esame di Fisica Matematica
21 giugno 2017

Il ***candidato*** scriva nello spazio sottostante il proprio Cognome e Nome.

COGNOME **NOME**

La ***prova*** consta di **3** esercizi e durerà **2** ***ore*** e **30** ***minuti***. ***Non è permesso*** usare né calcolatrice né telefono cellulare/smartphone/altri strumenti elettronici; non è consentito consultare testi o appunti, al di fuori di quelli eventualmente distribuiti dalla Commissione pena l'esclusione dalla prova.

Esercizi

1. (6pt) *Calcolare per il seguente sistema di vettori applicati:*

$\alpha = 1$
$\beta = -1$

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{e}_x - 2\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_1 - O \equiv (1,0,1), \\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_2 - O \equiv (0,1,1), \\ \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_3 - O \equiv (1,1,0), \end{cases}$$

rispetto al polo O

2 1. *il momento risultante del sistema;* $5 e_x - 2 e_z$

2 2. *il trinomio invariante del sistema;* $\mathcal{J} = 9$

2 3. *l'equazione dell'asse centrale del sistema;*

$$\begin{cases} x = \frac{2}{19} + 3\lambda \\ y = \frac{21}{19} - \lambda \\ z = \frac{5}{19} + 3\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

2. (12pt) *Un corpo rigido piano è ottenuto unendo ad una lamina circolare omogenea centrata in O di raggio $4R$, e massa $4\pi m$, un'asta omogenea AB di lunghezza $10R$, e massa $6m$, sempre centrata in O. Dalla lamina vengono asportati due rettangoli $CDEH$ e $C'D'E'H'$, con lati $CD = C'D' = 2R$ e $CH = C'H' = R$, disposti in modo che il diametro d inclinato di un angolo $\alpha = \frac{\pi}{3}$ rispetto ad AB, sia l'asse dei lati CH e $C'H'$, distanti R da O. Utilizzando la base ortonormale $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z\}$ con $\boldsymbol{e}_x$ parallelo ad AB, ed $\boldsymbol{e}_y$ nel piano, calcolare:*

1. *Gli elementi I_{xx}, I_{yy} e I_{xy} della matrice di inerzia calcolata rispetto a O*

9 ~~3~~ (a) *del disco pieno,*
5 6 ~~4~~ (b) *dei fori rettangolari,*
2 ~~2~~ (c) *dell'asta;*

3 2 2. *il momento di inerzia del corpo rispetto all'asse centrale ortogonale a d.* $\left(16\pi + \frac{49}{6}\right) mR^2$

$\alpha = 4$ $\beta = 6$

$$I_O^{d)} = 16\pi m R^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \qquad I_O^{a} = 50 mR^2 \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_O^{r} = 2 \times \begin{pmatrix} \frac{157}{96} mR^2 & -\frac{17\sqrt{3}}{32} mR^2 & 0 \\ -\frac{17\sqrt{3}}{32} mR^2 & +\frac{55}{96} mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & +\frac{53}{24} mR^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{157}{48} & -\frac{17\sqrt{3}}{16} & 0 \\ -\frac{17\sqrt{3}}{16} & +\frac{55}{48} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{53}{12} \end{pmatrix} mR^2$$

$\frac{1}{3}\,\cancel{6m}\,(10R)^2$

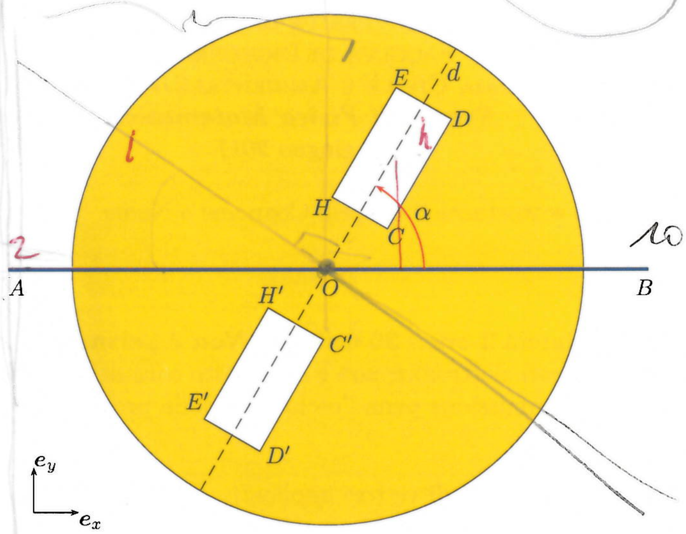
$(5R)^2$

$\frac{1}{12}\,6m \cdot 100R^2 + 6m \cdot 25R^2$

$2 \cdot 100\, mR^2 = 200\, mR^2$

$\left(\frac{1}{12}\,6 \cdot 100 + 6 \cdot 25\right) mR^2$

$200\, mR^2$



$10R,\ 6m$

$\omega_{12} = \sqrt{\frac{g}{R}}\sqrt{\frac{7 \pm \sqrt{37}}{6}}$

3. (12pt) *In un piano verticale, un punto materiale Q di massa $2m$ può muoversi senza attrito lungo una guida orizzontale o passante per un punto O; un disco omogeneo di massa m e raggio R è vincolato a rotolare senza strisciare lungo una guida rettilinea r passante per O e inclinata di un angolo $\theta_0 = \frac{\pi}{6}$ rispetto all'orizzontale. Una molla ideale con lunghezza a riposo nulla e costante elastica $k = 2\frac{mg}{R}$ attrae Q verso il centro C del disco. Usando come coordinate lagrangiane le ascisse x di Q lungo o e s di C lungo r, apartire da O si determini:*

2 1. *l'energia cinetica $T(x, s, \dot{x}, \dot{s})$ del sistema;* $T = m\dot{x}^2 + \frac{3}{4} m \dot{s}^2$

3 2. *l'energia potenziale $V(x, s)$ del sistema;* $V = -mg\frac{s}{2} + \frac{mg}{R}(x^2 + s^2 - xs\sqrt{3})$

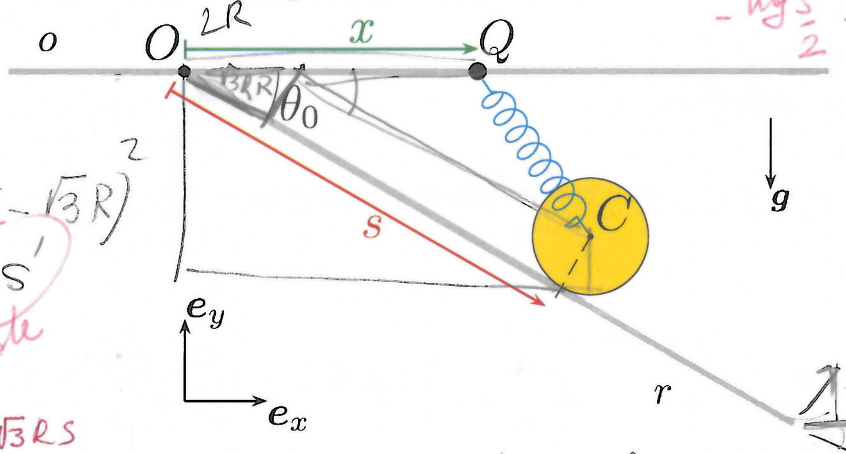
3 3. *la/le configurazioni di equilibrio del sistema;*

4 4. *la frequenza dei modi normali oscillanti attorno alla configurazione di equilibrio stabile.*

$\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$

$x_{eq} = \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)R$ $\quad s_{eq} = (1+\sqrt{3})R$

$-mg\frac{s}{2} + \frac{mg}{2R}\left(2x^2 - 2xR + 2s^2 - 2xs\sqrt{3}\right)$



$(x - 2R)^2 + (s - \sqrt{3}R)^2$

x' $\quad s'$

T_{in} = quadratica

$x^2 + s^2 - 4Rx - 2\sqrt{3}Rs + 4R^2 + 3R^2 - \cancel{2}(x - 2R)(s - \sqrt{3}R)\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}$

$e_2 = \frac{1}{2} e_x + \frac{\sqrt{3}}{2} e_y$

$e_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} e_x - \frac{1}{2} e_y$

$C - O = s\,\underline{e}_1 + R\,\underline{e}_2$

$Q - O = x\,\underline{e}_x$

$\overline{CQ}^2 = s^2 + R^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} sR - \frac{\sqrt{3}}{2} sR + x^2 = x^2 + s^2 - \sqrt{3}sR + \text{cost}$

$C - O = \left(\frac{s\sqrt{3}}{2} + R\frac{1}{2}\right)\underline{e}_x + \left(-\frac{s}{2} + \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)\underline{e}_y$

$Q - O = x\,e_x$