UNIVERSITÀ DI PAVIA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE E AMBIENTALE/PER L'AMBIENTE E IL TERRITORIO
***Esame di Fisica Matematica***
*25 giugno 2018*

Il ***candidato*** scriva nello spazio sottostante il proprio Cognome e Nome.

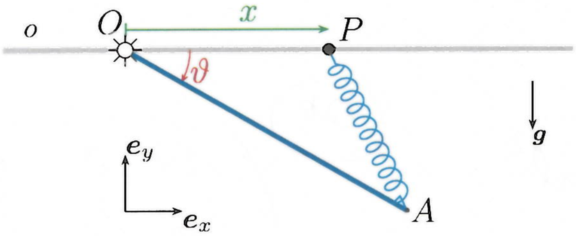
**COGNOME** **NOME**

La ***prova*** consta di **3** esercizi e durerà **2** ***ore*** e **30** ***minuti***. ***Non è permesso*** usare né calcolatrice né telefono cellulare/smartphone/altri strumenti elettronici; non è consentito consultare testi o appunti, al di fuori di quelli eventualmente distribuiti dalla Commissione pena l'esclusione dalla prova.

**Esercizi**

**1.** *In un piano verticale, un punto materiale $P$ di massa $3m$ è vincolato a muoversi senza attrito lungo una guida fissa orizzontale $o$ passante per un punto $O$; un'asta $OA$ di lunghezza $4R$ e massa $12m$ è libera di ruotare nel piano attorno all'estremo $O$ fisso. Una molla ideale con lunghezza a riposo nulla e costante elastica $k = \gamma \frac{mg}{R}$ attrae $P$ verso l'estremo $A$ dell'asta. Usando come coordinate lagrangiane l'ascissa $x$ di $P$ lungo $o$ a partire da $O$ e l'angolo $\vartheta$ che l'asta forma con l'orizzontale, contato positivamente in senso orario, si determini:*

1. *l'energia cinetica $T(x, \vartheta, \dot{x}, \dot{\vartheta})$ del sistema* **(2 pt)***;* $T = \frac{3}{2} m \dot{x}^2 + 32 m R^2 \dot{\theta}^2$
2. *l'energia potenziale $V(x, \vartheta)$ del sistema;* **(2 pt)***;* $V = -24 mgR \sin\theta + \frac{1}{2} \gamma \frac{mg}{R} (x^2 - 8Rx\cos\theta)$
3. *la/le configurazioni di equilibrio del sistema* **(2 pt)***;*
4. *la stabilità della/e configurazioni di equilibrio trovate al variare di $\gamma$;* **(3 pt)***.*
5. **posto** *$\gamma = 1$, la frequenza dei modi normali oscillanti attorno alla configurazione di equilibrio stabile* **(3 pt)***.*




$x_{1,2\,eq} = 0$

$\theta_{1,2\,eq} = \pm \frac{\pi}{2}$ + stab se $\gamma < \frac{3}{2}$, − inst

$\theta_3 = \arcsin\left(\frac{3}{2\gamma}\right)$, $\pi - \theta_3$

$x_{3,4} = \pm \frac{R}{2} \frac{1}{\gamma} \sqrt{64\gamma^2 - 144}$

---

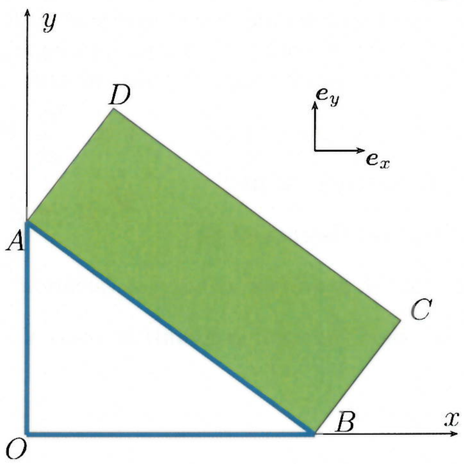
$\lambda_{1,2} = \frac{1}{576}\left(204 \pm \sqrt{27792}\right)\frac{g}{R} = \frac{1}{48}\left(17 \pm \sqrt{193}\right)\frac{g}{R}$

**2.** *Un corpo rigido piano è composto da tre aste omogenee $OA$ di lunghezza $3\ell$ e massa $2m$, $OB$ di lunghezza $4\ell$ e massa $m$, $AB$ di lunghezza $5\ell$ e massa $3m$, saldate negli estremi, e da una lamina rettangolare omogenea $ABCD$, con il lato $AB$ saldato all'asta e $BC = 2\ell$, avente massa $m$. Utilizzando la base ortonormale $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ con $\mathbf{e}_x$ parallelo a $B - O$, ed $\mathbf{e}_y$ parallelo ad $A - O$ (vd. figura), determinare:*

1. *gli elementi $I_{xx}$, $I_{yy}$ e $I_{xy}$ della matrice di inerzia, calcolata rispetto a $O$*
   (a) *dell'asta $OA$ (**1 pt**);*
   (b) *dell'asta $OB$ (**1 pt**);*
   (c) *dell'asta $AB$ (**3 pt**);*
   (d) *della lamina rettangolare (**4 pt**);*
2. *il momento di inerzia del corpo rispetto alla retta $AB$, indicando anche i contributi delle aste e della lamina separatamente(**3 pt**).*

$I_{AB} = \frac{96}{25} m\ell^2 + \frac{48}{25} m\ell^2 + 0 + \frac{4}{3} m\ell^2$

$\alpha = 2$
$\beta = 1$
$\gamma = 3$
$\delta = 1$




$\frac{144}{25} m\ell^2 + \frac{4}{3} m\ell^2$

$= \frac{432 + 100}{75} m\ell^2 = \frac{532}{75} m\ell^2$

OA $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} m\ell^2$

OB $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{16}{3} \end{pmatrix} m\ell^2$

AB $\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 16 \end{pmatrix} m\ell^2$

rett $\begin{pmatrix} \frac{469}{75} & -\frac{257}{50} \\ -\frac{257}{50} & \frac{616}{75} \end{pmatrix} m\ell^2$