

UNIVERSITÀ DI PAVIA  
FACOLTÀ DI INGEGNERIA  
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE E AMBIENTALE/PER L'AMBIENTE E IL TERRITORIO  
**Esame di Fisica Matematica**  
26 settembre 2018

Il *candidato* scriva nello spazio sottostante il proprio Cognome e Nome.

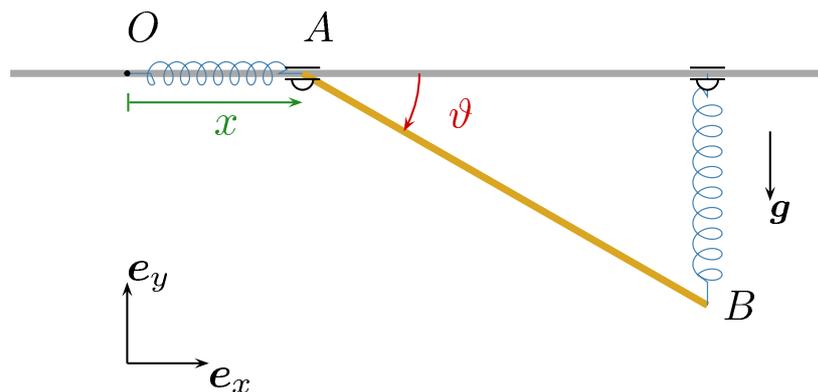
COGNOME

NOME

La *prova* consta di **2** esercizi e durerà **2 ore e 45 minuti**. *Non è permesso* usare né calcolatrice né telefono cellulare/smartphone/altri strumenti elettronici; non è consentito consultare testi o appunti, al di fuori di quelli eventualmente distribuiti dalla Commissione pena l'esclusione dalla prova.

1. In un piano verticale, un'asta  $AB$  omogenea di massa  $5m$  e di lunghezza  $2\ell$  ha l'estremo  $A$  vincolato a scorrere lungo una guida fissa orizzontale; una molla di costante elastica  $k = \frac{mg}{\ell}$  e lunghezza a riposo nulla attrae  $A$  verso un punto fisso  $O$  posto sulla guida. Una seconda molla, di costante elastica  $\gamma k$  e lunghezza a riposo nulla attrae  $B$  verso la guida, ed è vincolata in modo da restare sempre verticale (vedi Figura). Usando come coordinate lagrangiane l'angolo  $\vartheta$  che l'asta forma con l'orizzontale, contato positivamente in senso orario, e l'ascissa  $x$  di  $A$  misurata da  $O$ , si determini:

1. l'energia cinetica  $T(x, \vartheta, \dot{x}, \dot{\vartheta})$  del sistema (**3 pt**);
2. l'energia potenziale  $V(x, \vartheta)$  del sistema (**2 pt**);
3. la/le configurazioni di equilibrio del sistema al variare di  $\gamma$  (**2 pt**);
4. la stabilità della/e configurazioni di equilibrio trovate al variare di  $\gamma$  (**2 pt**);
5. le pulsazioni (frequenze) dei modi normali oscillanti attorno alla posizione di equilibrio stabile per  $\gamma = 1$  (**3 pt**).



2. Un corpo rigido piano è ottenuto è formato da una lamina circolare omogenea di centro  $O$  e raggio  $4R$ , avente massa  $8m$  nella quale viene praticato un foro circolare di raggio  $R$  e centro  $O'$ , posto a distanza  $3R$  da  $O$ ; inoltre, un'asta omogenea  $AB$  di massa  $2m$  e lunghezza  $4R\sqrt{3}$  viene saldata nel piano con gli estremi sulla circonferenza esterna della lamina, con  $A$  posto sul prolungamento di  $OO'$ , e  $B$  posto al sotto di  $OO'$ . Rispetto alla base  $\{e_x, e_y, e_z\}$ , il cui versore  $e_x$  è diretto come  $A - O$  ed  $e_y$  è ortogonale a esso nel piano (vedi figura) determinare:

1. gli elementi  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$  e  $I_{xy}$  della matrice di inerzia, calcolata rispetto a  $O$

(a) della lamina piena (**1.5 pt**);

(b) della massa (foro circolare) asportata (**2.5 pt**);

(c) dell'asta  $AB$  (**4 pt**);

2. il momento di inerzia del corpo rispetto alla retta  $BO$ , indicando anche i contributi separatamente (**4 pt**).

