CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	28 nevoso CCXXVII RF ottidì
Cognome e Nome:	Matricola:

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8pt)** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}; \qquad \text{sia inoltre } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Sia $q\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $q(X) = X^{\mathrm{T}}AX$.

(a) Determinare gli autovalori di A e le relative molteplicità algebriche e geometriche; si stabilisca il segno di q (cioè se q è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).

(b) Determinare una matrice N per il cambio di variabile $X = NX'$ che consente di scrivere la forma quadrata in forma canonica, indicando esplicitamente la forma canonica.

(c) Esiste un vettore *non nullo* X_0 tale che $q(X) = 0$? In caso affermativo, si determini esplicitamente X_0. In caso negativo, si spieghi perché un tale vettore non esiste.

(d) Determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che **non** sia simile ad A.

---

2. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-k & 1 \\ -2 & 1 & 1+k & -1 \\ -k-1 & -1 & -2 & -k-2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:

(d) Sia $k = 0$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

---

3. **(8 pt)** Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio definito dall'equazione

$$U = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,|\, x - y + z + 2t = 0 \}.$$

(a) Determinare la/le equazioni per V in forma cartesiana.

(b) Determinare $\dim U \cap V$ e $\dim(U + V)$, e una loro base.

(c) Determinare una base di $V^{\perp}$.

(d) Determinare una base ortogonale di U.
