CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	28 nevoso CCXXVII RF ottidì
Cognome e Nome:	**Matricola:**

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8pt)** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}; \qquad \text{sia inoltre } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Sia $q\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $q(X) = X^{\mathrm{T}}AX$.

(a) Determinare gli autovalori di A e le relative molteplicità algebriche e geometriche; si stabilisca il segno di q (cioè se q è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).

(b) Determinare una matrice N per il cambio di variabile $X = NX'$ che consente di scrivere la forma quadrata in forma canonica, indicando esplicitamente la forma canonica.

(c) Esiste un vettore *non nullo* X_0 tale che $q(X) = 0$? In caso affermativo, si determini esplicitamente X_0. In caso negativo, si spieghi perché un tale vettore non esiste.

(d) Determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che **non** sia simile ad A.

$\lambda_1 = 1$ semplice, $\lambda_2 = -3$ con molteplicità 2, $\lambda_3 = -1$ semplice. La f.q. è indefinita.

Forma canonica $q'(X') = (x')^2 - 3(y')^2 - 3(z')^2 - (t')^2$;

$$N = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ o, per es. } X_0 = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

---

2. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-k & 1 \\ -2 & 1 & 1+k & -1 \\ -k-1 & -1 & -2 & -k-2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:

(d) Sia $k = 0$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	$\operatorname{rg} A$	$\operatorname{rg} \tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	$\dim S$
1	2	3	no	–
- 2	2	2	sì	2
resto	3	3	sì	1

$$\operatorname{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq 1, -2 \\ 2 \text{ se } k = 1, -2. \end{cases}$$

Risolubile per $k \neq 1$, $\dim \mathrm{Sol} = 1$ per $k \neq 1, -2$. Soluzione per $k = 0$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ s \in \mathbb{R}.$$

---

3. **(8 pt)** Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio definito dall'equazione

$$U = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,|\, x - y + z + 2t = 0 \}.$$

(a) Determinare la/le equazioni per V in forma cartesiana.
$y - z = 2t - x - y = 0.$

(b) Determinare $\dim U \cap V$ e $\dim(U + V)$, e una loro base.
$\dim U \cap V = 1$, $\dim(U + V) = 4$

(c) Determinare una base di $V^\perp$.

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(d) Determinare una base ortogonale di U.

$$B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$