1

Università di Pavia
Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale/per l'Ambiente e il Territorio
Esame di Fisica Matematica
29 gennaio 2018

Il ***candidato*** scriva nello spazio sottostante il proprio Cognome e Nome.

COGNOME **NOME**

La ***prova*** consta di **3** esercizi e durerà **2 *ore*** e **30 *minuti***. ***Non è permesso*** usare né calcolatrice né telefono cellulare/smartphone/altri strumenti elettronici; non è consentito consultare testi o appunti, al di fuori di quelli eventualmente distribuiti dalla Commissione pena l'esclusione dalla prova.

Esercizi

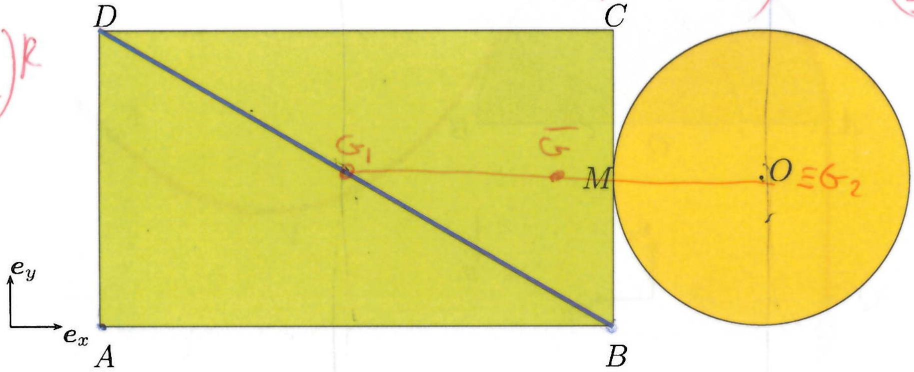
1. *Un corpo rigido piano è composto da una lamina rettangolare omogenea $ABCD$, con lati $AB = 2\sqrt{3}R$ e $BC = 2R$ e massa m; un'asta omogenea BD di massa $2m$; una lamina circolare omogenea centrata in O di raggio R e massa $4m$ tangente esternamente nel punto medio M del lato BC. Utilizzando la base ortonormale $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ con $\mathbf{e}_x$ parallelo ad AB, ed $\mathbf{e}_y$ parallelo ad AD (vd. figura), determinare:*

1. *gli elementi I_{xx}, I_{yy} e I_{xy} della matrice di inerzia, calcolata rispetto ad A*
   (a) *della lamina rettangolare* (**3 pt**),
   (b) *dell'asta* (**3 pt**);
   (c) *del disco* (**3 pt**),
2. *il momento **centrale** di inerzia del corpo rispetto alla direzione di $\mathbf{e}_y$, indicando anche –se calcolati– i contributi dei tre corpi separatamente*(**3 pt**).

$\frac{4}{7}(19+6\sqrt{3})$ $\left(\frac{76}{7}+\frac{24}{7}\sqrt{3}\right)mR^2$

$x_G = \left(\frac{11}{7}\sqrt{3}+\frac{4}{7}\right)R$

$y_G = R$



rett
$\left(\frac{113}{49}+\frac{32}{49}\sqrt{3}\right)mR^2$

asta
$\left(\frac{226}{49}+\frac{64}{49}\sqrt{3}\right)mR^2$

disco
$\left(\frac{193}{49}+\frac{72}{49}\sqrt{3}\right)mR^2$

2. *Calcolare per il seguente sistema di vettori applicati:*

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z & \text{applicato in } P_1 - O \equiv (1,1,2), \\ \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z & \text{applicato in } P_2 - O \equiv (0,1,1), \\ \mathbf{v}_3 = 2\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z & \text{applicato in } P_3 - O \equiv (1,1,0), \end{cases}$$

rett.

$$[I_O^r] = \begin{pmatrix} 4/3 & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 16/3 \end{pmatrix} mR^2$$

asta

$$[I_O^a] = \begin{pmatrix} 8/3 & -\frac{4}{3}\sqrt{3} & 0 \\ -\frac{4}{3}\sqrt{3} & 8 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{32}{3} \end{pmatrix} mR^2$$

disco

$$[I_O^d] = mR^2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4(1+2\sqrt{3}) & 0 \\ -4(1+2\sqrt{3}) & 53+16\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 58+16\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

centrale

$$\begin{pmatrix} 1/3 & & \\ & 1 & \\ & & 4/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2/3 & \frac{2}{3}\sqrt{3} & \\ \frac{2}{3}\sqrt{3} & 2 & \\ & & 8/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

$M_O = -2e_x + 3e_y \; (+0e_z)$

1. *il momento risultante del sistema* (**2 pt**);
2. *il trinomio invariante del sistema* (**2 pt**);
3. *l'equazione dell'asse centrale del sistema* (**2 pt**);

$J = 1$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{matrix} -3/26 + 4\lambda \\ -1/13 + 3\lambda \\ 9/13 + \lambda \end{matrix}$

3. *In un piano verticale, un filo omogeneo QF ha peso per unità di lunghezza costante $4p/R$ e lunghezza opportuna; il tratto AQ, di lunghezza R e l'estremo Q è attratto da una molla ideale di costante elastica $\gamma p/R$ verso il punto Q' posto sulla verticale per A, a distanza $3R/2$ da A; il tratto AC appoggiato senza attrito ad un supporto semicircolare fisso di diametro $AB = 2R$ e centro O orizzontale, in modo che il raggio OC formi un angolo $\beta = \pi/6$ con l'orizzontale; infine, il tratto CF è mantenuto teso grazie ad una forza $\boldsymbol{f} = 4p(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y)$ applicata in F (vd. figura). In condizioni di equilibrio, determinare:*

$\alpha = 4$

$\beta = 4$

1. *la tensione τ_C del filo nel punto C* (**2 pt**); $\tau_C = 8p$
2. *la tensione $\tau(\vartheta)$ del filo nel generico punto P del tratto AC, in funzione dell'angolo ϑ che OP forma con l'orizzontale* (**2 pt**); $\tau_A = (8-2)p$ $\quad \tau(\theta) = 6p + 4p\sin\theta$
3. *l'equazione dell'arco libero CF, riferito ad assi orizzontali e verticali centrati nel punto V di minima quota dell'arco CF* (**2 pt**); $y(x) = R\left(\mathrm{Ch}\left(\frac{x}{R}\right) - 1\right)$
4. *il dislivello tra i punti C e F* (**2 pt**);
5. *il valore di γ per garantire l'equilibrio alle condizioni date* (**1 pt**); $h_{CF} = (2 - \sqrt{2})R$
6. *la lunghezza dell'intero filo QF* (**3 pt**).

$l = \left(1 + \frac{5}{6}\pi + (1+\sqrt{3})\right)R$

$\gamma = 16 - 12 = 4$