UNIVERSITÀ DI PAVIA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE ED AMBIENTALE
Esame di Fisica Matematica
5 settembre 2014

Il *candidato* scriva nello spazio sottostante il propro Cognome e Nome.

COGNOME **NOME**

La ***prova*** consta di **3** Quesiti e durerà **2** *ore* e **30** *minuti*. *Non è permesso* consultare testi od appunti, al di fuori di quelli distribuiti dalla Commissione.

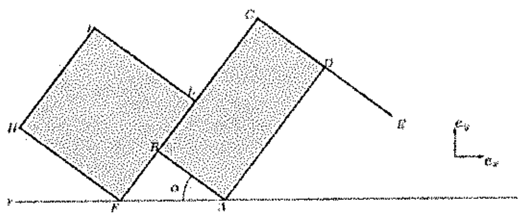
1. *Assegnato il sistema di vettori applicati:*

$$\begin{cases} v_1 = 3e_x + e_y + 2e_z & \text{applicato in } P_1 - O \equiv (1,2,-3), \\ v_2 = 2e_x + 2e_y - 4e_z & \text{applicato in } P_2 - O \equiv (-1,3,2), \\ v_3 = e_x + 2e_y + e_z & \text{applicato in } P_3 - O \equiv (2,4,-1) \end{cases}$$

determinarne

1. risultante (**1** pt.);
2. momento risultante rispetto ad O (**3** pt.);
3. trinomio invariante (**1** pt.);
4. l'equazione dell'asse centrale (**2** pt.);

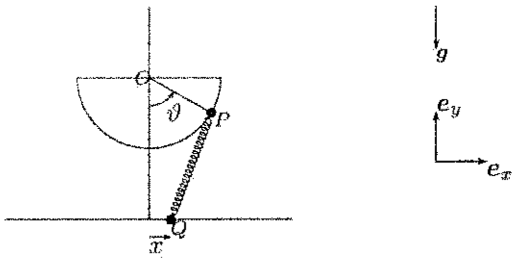
2. *Un corpo rigido piano è formato da un rettangolo $ABCD$ di massa $5m$ e lati $AB = 2\ell$ e $AC = 4\ell$, con il lato AB che forma un angolo con la retta r, su cui poggia A, tale che $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; da un quadrato $FLIH$ di massa $10m$ e lato di lunghezza 3ℓ, con F appoggiato su r ed FL sovrapposto in parte a BC; da un'asta DE, ortogonale ad AB, di massa $15m$, lunghezza 2ℓ. Determinare le coordinate del centro di massa del corpo*



*rispetto al punto A, riferite alla base $\{e_x, e_y\}$ (**2** punti); la matrice di inerzia del corpo rispetto al punto*

A precisando, per ogni elemento di matrice, i contributi del rettangolo (6 punti), del quadrato (3 punti) e dell'asta (3 punti), rispetto alla base $\{e_x, e_y, e_z\}$.

3. *In un piano verticale vi sono due guide fisse, una a forma di semicirconferenza di centro O e raggio R, l'altra orizzontale e rettilinea, a distanza $2R$ da O. Sulla semicirconferenza è libero di muoversi senza attrito un punto P di massa m mentre sulla retta è libero di muoversi senza attrito un punto Q di massa $2m$. I punti P e Q si attraggono tramite una forza elastica di costante $k = 4mg/R$. Introdotte le coordinate ϑ ed x indicate in figura, determinare l'energia cinetica del sistema (2 punti) e l'energia potenziale (3 punti). Scrivere le equazioni di Lagrange (4 punti) e determinare $\ddot{\vartheta}(0)$ e $\ddot{x}(0)$ se, all'istante $t = 0$ il sistema parte dalla quiete con $\vartheta(0) = \frac{\pi}{4}$ ed $x(0) = R$ (4 punti).*



$P-O = R\sin\theta\, \underline{e}_x - R\cos\theta\, \underline{e}_y$

$Q-O = x\underline{e}_x - 2R\underline{e}_y$

$\overline{PQ}^2 = (R\sin\theta - x)^2 + (2R - R\cos\theta)^2$

$= x^2 + R^2\sin^2\theta - 2Rx\sin\theta + 4R^2 + R^2\cos^2\theta - 4R^2\cos\theta$

$T = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$

$V = -mgR\cos\theta + \frac{2mg}{R}(x^2 - 4R^2\cos\theta - 2Rx\sin\theta)$

$-\partial V/\partial x$

$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)' = \frac{\partial L}{\partial x}$ $\quad \cancel{2m}\ddot{x} = -\left(\frac{\cancel{2m}g}{R}(2x - 2R\sin\theta)\right)$ $\quad \boxed{\ddot{x} = \frac{2g}{R}(R\sin\theta - x)}$

$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)' = \frac{\partial L}{\partial \theta}$ $\quad \cancel{m}R^2\ddot{\theta} = -\left(\cancel{m}gR\sin\theta + \frac{2\cancel{m}g}{\cancel{R}}(4R^{\cancel{2}}\sin\theta - 2\cancel{R}x\cos\theta)\right)$

$\boxed{\ddot{\theta} = \frac{1}{R^2}(4gx\cos\theta - 9gR\sin\theta)}$

$\theta(0) = \frac{\pi}{4} \quad x(0) = R \quad (\dot{x}(0) = 0 \quad \dot{\theta}(0) = 0)$

$\ddot{x}(0) = \frac{2g}{\cancel{R}}\left(\cancel{R}\frac{\sqrt{2}}{2} - \cancel{R}\right) = g(\sqrt{2} - 2);\quad \ddot{\theta}(0) = \frac{1}{R^2}\left(4gR\frac{\sqrt{2}}{2} - 9gR\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{5}{2}\frac{g}{R}$