capitolo nono

RETTE E PIANI NELLO SPAZIO

IL PIANO

129. Abbiamo introdotto la nozione di **spazio**, considerato come un insieme di punti ed ammesso che in esso vi sono dei sottoinsiemi di punti a cui è stato dato il nome di **piani.**

I piani sono caratterizzati dai seguenti postulati:

Se una retta ha con un piano due punti in comune, giace sul piano.

Dunque, dato un piano α e due punti A e B di una retta r, se

$$\{A \in \alpha \,,\; B \in \alpha\} \Leftrightarrow AB \subset \alpha \,.$$

Per tre punti dello spazio che non appartengono ad una stessa retta, passa un piano ed uno solo.

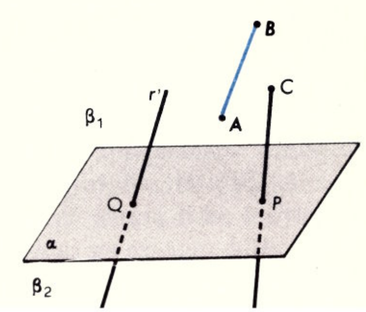
Come conseguenza, un piano resta anche individuato da una retta e da un punto non appartenente ad essa, o da due rette aventi un punto in comune, o da due rette fra loro parallele.

130. Ammettiamo inoltre che:

*Una retta giacente su un piano, lo **divide in due regioni ciascuna delle quali** si dice semipiano.*

Ogni piano divide lo spazio in due regioni β_1 e β_2 dette semispazi.

Due punti A e B non situati sul piano α che determina i due semispazi, e che appartengono ad uno stesso semispazio sono gli estremi di un segmento che non ha alcun punto in comune con il piano. Come conseguenza, ogni semispazio è un insieme convesso.



Il segmento che congiunge un punto C di un semispazio β_1 con un punto D dell'altro semispazio β_2, incontra in un punto P il piano α

Dunque, se:

$$\{C \in \beta_1 \, , \; D \in \beta_2\} \Rightarrow CD \cap \alpha = P \, .$$

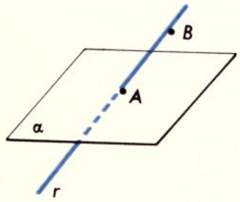
Come conseguenza di tale postulato, si ha che:

Se una retta r ha in comune con un piano α un solo punto Q, viene divisa da questo in due semirette r' e r'' situate da bande opposte rispetto al piano, situate cioè in semispazi opposti.

131. *Posizioni relative di una retta e di un piano.*

Si è ammesso che se una retta r ha due punti in comune con un piano α, tutti i punti della retta appartengono a quel piano, e si dice in tal caso che la retta r **giace** sul piano α, o appartiene ad α.

Perciò, se una retta non appartiene ad un piano, potrà al più avere con esso un solo punto in comune.



Se ad es., congiungiamo un punto A di un piano α, con un punto B non appartenente ad esso, la retta AB non può avere con il piano α altri punti in comune all'infuori del punto A. Brevemente possiamo scrivere:

$$\{A \in \alpha \, , \; B \notin \alpha\} \Rightarrow \alpha \cap AB = A \, .$$

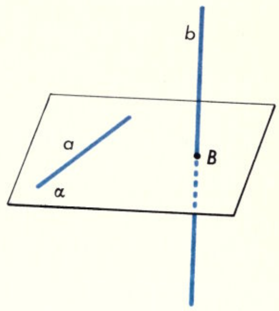
In tal caso si dice che la retta r è **incidente** al piano α nel punto A.

Se poi, come si vedrà in seguito, una retta s non ha alcun punto in comune con un piano α, si dice che essa è **parallela** al piano α, e scriveremo: $s \cap \alpha = \varnothing$.

132. *Posizioni relative di due rette nello spazio.*

Due rette appartenenti ad uno stesso piano α, si dicono **complanari.** Esse sono incidenti se hanno un punto in comune, o parallele se non ne hanno alcuno.

Nello spazio, può anche accadere che non esista alcun piano che contenga due rette a e b.



Se ad es. consideriamo una retta b incidente ad un piano α in un suo punto B, ed una qualsiasi retta a giacente su α e non passante per B, risulta evidente che non esiste alcun piano che contenga le due rette a e b. Infatti, se tale piano esistesse, contenendo la retta a ed il punto B, coinciderebbe con α e quindi b dovrebbe giacere su tale piano contro l'ipotesi fatta.

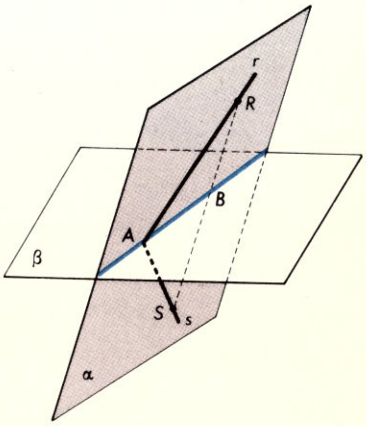
Due rette a e b che non hanno alcun punto in comune e che non giacciono su uno stesso piano, si dicono **rette sghembe.**

133. *Posizioni relative di due piani.*

Per stabilire quali sono le posizioni relative di due piani nello spazio, dimostriamo il seguente:

Teorema. **- Se due piani distinti hanno un punto in comune, hanno in comune una retta passante per quel punto.**

Siano α e β due piani distinti aventi in comune un punto A; dimostriamo che essi hanno anche in comune una retta passante per A.



A tale scopo, consideriamo sul piano α due semirette r ed s aventi per comune origine il punto A e situate da bande opposte rispetto la piano β. La congiungente due qualunque punti R ed S, diversi da A, presi uno sulla retta r e l'altro sulla retta s, incontrerà (**130**) il piano β in un punto B, e poiché RS è sul piano α, anche il punto B apparterrà a tale piano.

I punti A e B sono dunque sia sul piano α, sia sul piano β, perciò (**129**) anche la retta AB è comune ad essi e prende il nome di **intersezione** dei due piani.

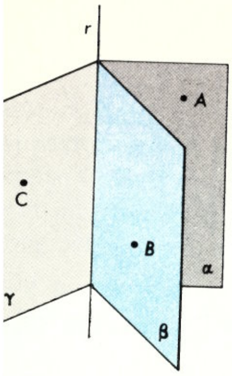
Risulta evidente che all'infuori di questa retta i due piani α e β non possono avere altri punti in comune, altrimenti coinciderebbero. Dunque, possiamo scrivere sotto forma simbolica:

$$\{A \in \alpha\ ,\ A \in \beta\ ,\ \alpha \neq \beta\} \Rightarrow \alpha \cap \beta = \textit{retta } AB.$$

Due piani che hanno in comune un punto, e quindi una retta passante per esso, si dicono **secanti.**

Stabiliremo in seguito che esistono dei piani che non hanno alcun punto in comune. In tal caso si dice che quei piani sono **paralleli.**

Dunque, due piani distinti o sono secanti, o sono paralleli.



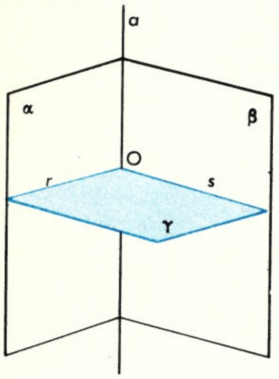
134. *Per una retta, nello spazio, passano infiniti piani.*

Sia r una retta qualunque ad A, B, C, ..., dei punti non appartenenti ad essa.

Ciascuno di tali punti insieme alla retta r individua un piano (**129**), e poiché i punti non appartenenti alla retta r sono infiniti, così sono anche in numero infinito i piani Ar, Br, Cr, ...

Gli infiniti piani passanti per una retta costituiscono un **fascio di piani,** di cui la retta si dice **asse,** o sostegno.

135. Dati nello spazio una retta a ed un suo punto O, consideriamo due piani distinti α e β passanti per a e conduciamo rispettivamente in essi le perpendicolari r ed s alla retta a nel punto O. La retta a intersecherà il piano γ delle due rette r ed s nel punto O e sarà perpendicolare ad esse.



Quindi, mentre nel piano, per un punto si può condurre una sola perpendicolare ad una retta del piano, nello spazio, per un punto O di una retta si possono condurre infinite perpendicolari ad essa, e precisamente una per ciascuno degli infiniti piani del fascio che ha quella retta per asse.

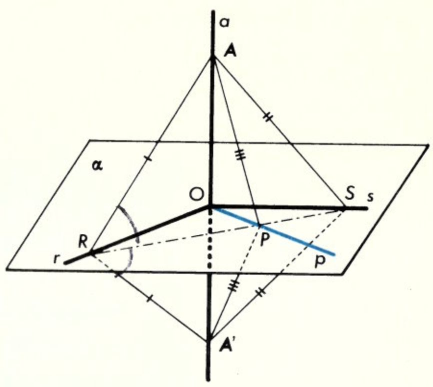
Dimostreremo in seguito che tutte queste perpendicolari stanno su uno stesso piano, ed a tale scopo premettiamo il seguente teorema.

136. ***Teorema.*** **- Se una retta incontra un piano ed è perpendicolare a due rette del piano passanti per il punto d'intersezione, è perpendicolare a tutte le altre rette del piano passanti per lo stesso punto.**

Sia a la retta che interseca il piano α nel punto O e che sia perpendicolare a due rette r ed s, situate su tale piano e passanti per O.

Vogliamo dimostrare che a è perpendicolare ad ogni retta p, giacente su α e passante per O.

A tale scopo, conduciamo nel piano α una retta non passante per O e che intersechi le rette r, s, p, rispettivamente nei punti R, S, P; stacchiamo poi sulla retta a, e da bande opposte rispetto ad O, i due segmenti $OA \cong OA'$, e congiungiamo infine A ed A' con i punti R, S, P.



La retta r, essendo perpendicolare al segmento AA' nel suo punto medio è l'asse di AA', quindi

$$AR \cong A'R\,.$$

Similmente la retta s è asse di AA' quindi risulta pure

$$AS \cong A'S\,,$$

ed allora i due triangoli ARS ed $A'RS$, avendo

$$AR \cong A'R\,, \quad AS \cong A'S \quad \text{ed} \quad RS \text{ comune}$$

sono congruenti per il terzo criterio, e quindi in particolare si avrà:

$$\widehat{ARS} \cong A'\widehat{RS}\,.$$

Ma anche i due triangoli ARP ed $A'RP$ avendo

$$AR \cong A'R\,, \quad \widehat{ARS} \cong A'\widehat{RS} \quad \text{ed} \quad RP \text{ comune}$$

sono congruenti per il primo criterio, quindi risulta pure

$$AP \cong A'P\,.$$

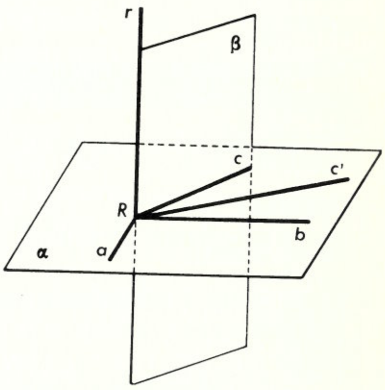
Si deduce allora che il triangolo APA' è isoscele, perciò la mediana OP relativa alla sua base AA' è anche altezza; resta quindi dimostrato che la retta a è perpendicolare alla retta p. Brevemente possiamo scrivere:

$$\{r,\ s,\ p \subset \alpha\,; \quad a \perp r\,,\ a \perp s\,; \quad r \cap s = \dot{O}\} \Rightarrow a \perp p\,.$$

Stabiliamo ora il seguente

137. ***Teorema.*** **- Tutte le perpendicolari ad una data retta in un suo punto, giacciono su uno stesso piano.** Solo enunciato

Siano a e b due rette perpendicolari ad una retta assegnata r in un suo punto R.



Se α è il piano individuato dalle due rette a e b, per il teorema precedente, ogni retta ppartenente al piano α e passante per R isulterà perpendicolare alla retta r.

ogliamo dimostrare che, inversamente, qualunque altra retta c perpendicolare ad r passante per R, giace sul piano α.

agioniamo per assurdo; se la retta c non ppartenesse al piano α, il piano β individuato dalle due rette r e c avendo in comune on α il punto R lo intersecherebbe secondo na retta c', che giacendo su α sarebbe perpendicolare ad r nel punto R. el piano β si avrebbero perciò due rette c e c' perpendicolari entrambe la retta r in un suo punto R. Ciò è assurdo, quindi resta dimostrato che la tta c deve giacere su α.

138. Possiamo quindi concludere affermando che il luogo geometrico di tutte le rette perpendicolari ad una data retta, in un suo punto, è un piano.

Tale piano si dice **piano perpendicolare** alla retta in quel punto, e si ha la seguente

***Definizione.* - Una retta si dice perpendicolare ad un piano se lo incontra ed è perpendicolare a tutte le rette del piano che passano per il loro punto d'incontro.**

Il punto comune ad un piano e ad una retta perpendicolare ad esso, si dice **piede** della perpendicolare.

139. Tenendo presente la definizione di retta e piano perpendicolari, e per il teorema del n. **136**, possiamo affermare che:

Una retta è perpendicolare ad un piano se lo incontra e se è perpendicolare a due rette del piano passanti per il loro punto comune.

Una retta che incontra un piano e non è perpendicolare ad esso, si dice **obliqua** al piano.

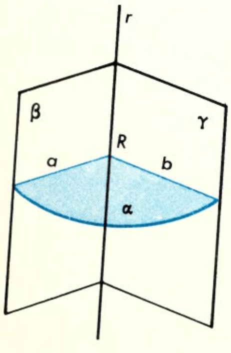
140. Dimostriamo ora l'esistenza e l'unicità del piano passante per un punto e perpendicolare ad una retta assegnata.

***Teorema.* - Per un punto dato si può condurre un piano, ed uno solo, perpendicolare ad una retta assegnata.**

solo enunciato

1° Caso. - *Il punto R appartenga alla retta assegnata r.*

Sia r una qualunque retta ed R un suo punto. Vogliamo dimostrare che per il punto R si può condurre un solo piano perpendicolare ad r.

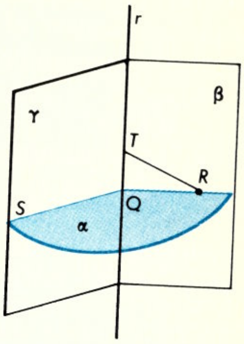


Facciamo passare per la retta r due piani qualsiasi β e γ e conduciamo in essi le rette a e b perpendicolari ad r nel punto R. Il piano α individuato da tali rette è evidentemente perpendicolare ad r nel punto R (**139**).

Tale piano è unico, infatti supponendo che esista anche un altro piano α' perpendicolare ad r in R, tutte le rette condotte in esso per R devono essere perpendicolari ad r, ma tutte le perpendicolari ad r nel punto R devono giacere sul piano α, quindi i due piani α' ed α devono coincidere.

2° **Caso.** - *Il punto R non appartenga alla retta r.*

Se il punto R non appartiene alla retta r, conduciamo nel piano β individuato da R ed r, la retta RQ perpendicolare ad r. Facciamo poi passare per r un altro piano qualunque γ e conduciamo in esso la retta QS perpendicolare ad r. Il piano α determinato dalle due rette QR e QS è perpendicolare (**139**) alla retta r e passa per R, quindi è il piano richiesto.

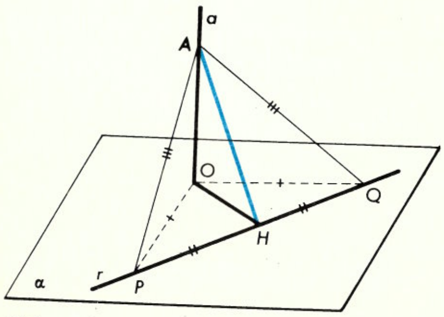


Di tali piani ve ne è uno solo; infatti se vi fosse un altro piano ω perpendicolare ad r e passante per R, che incontrasse r in Q dovrebbe per il caso precedente coincidere con α. Se invece incontrasse la retta r in un punto T diverso da r, sarebbe RT perpendicolare ad r ed allora nel piano β si potrebbero condurre da un suo punto R due perpendicolari distinte RQ ed RT ad una sua retta r, il che è assurdo.

55

141. ***Teorema delle tre perpendicolari.*** **- Se dal piede di una retta perpendicolare ad un piano si conduce la perpendicolare ad una qualunque retta del piano, la congiungente il piede di questa seconda perpendicolare con un qualunque punto della prima, è perpendicolare alla retta giacente sul piano.**

Sia a una retta perpendicolare ad un piano α. Conduciamo dal suo piede O la perpendicolare OH ad una qualunque retta r giacente su α e non passante per O. Vogliamo dimostrare che la retta AH che congiunge il piede H di questa seconda perpendicolare ad un qualunque punto A della data retta a, è perpendicolare ad r.



Stacchiamo su r, e da bande opposte rispetto ad H, i due segmenti

$$HP \cong HQ$$

e congiungiamo P e Q con O e con A.

Poiché OH è perpendicolare al segmento PQ nel suo punto medio H, è l'asse di PQ quindi

$$OP \cong OQ\ ;$$

segue da ciò che i due triangoli AOP ed AOQ, avendo:

$$OP \cong OQ\ , \quad AO \text{ in comune}, \quad \widehat{AOP} \cong \widehat{AOQ} \text{ perché retti}$$

sono congruenti, quindi in particolare si ha:

$$AP \cong AQ\ .$$

Allora, il triangolo PAQ è isoscele e quindi la mediana AH relativa alla sua base PQ è anche altezza, dunque AH è perpendicolare a PQ, che è quanto volevamo dimostrare.

Osserviamo inoltre che essendo r perpendicolare alle due rette OH ed AH, è perpendicolare al loro piano, cioè la retta r è perpendicolare al piano AOH delle tre perpendicolari.

solo enunciato

142. Dimostriamo ora l'esistenza e l'unicità della perpendicolare condotta per un punto ad un piano assegnato.

***Teorema.* - Per un punto dato si può condurre una, ed una sola retta perpendicolare ad un piano assegnato.**

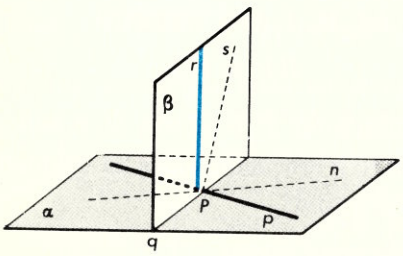
Poiché il punto dato può appartenere o no al piano assegnato, considereremo separatamente i due casi.

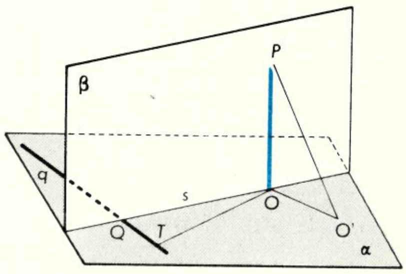
1° Caso. - *Il punto dato P sia sul piano assegnato α.*

Conduciamo nel piano α una qualunque retta p passante per P e costruiamo il piano perpendicolare a p nel punto P.

I due piani α e β avendo in comune il punto P, hanno anche in comune una retta q passante per P. La retta r, giacente sul piano β e perpendicolare alla q nel punto P, è la perpendicolare richiesta.

Infatti tale retta essendo perpendicolare a p, perché giace nel piano β perpendicolare a p (**137**), ed essendo perpendicolare a q per costruzione, è perpendicolare a due rette del piano α passanti per il suo piede P, perciò (**139**) è perpendicolare al piano α.





Dimostriamo che ve n'è una sola. Se infatti per il punto P si potessero condurre due perpendicolari r ed s al piano α, il loro piano γ taglierebbe α secondo una retta n, e le due rette r ed s, essendo perpendicolari al piano α, sarebbero entrambe perpendicolari alla retta n.

Ciò è assurdo perché in un piano γ si può condurre ad una sua retta n, in un suo punto P, una perpendicolare ed una sola.

2° Caso. - *Il pu*

Consideriamo sul
perpendicolare a
Se nel piano β c
piani α e β, ott
Osserviamo infat
passa per il suo
teorema delle tre
il nuovo piede O
La retta PO è pe
è perpendicolare
Essa è la sola. I
perpendicolari a
perpendicolari d

No

143. Ricorder
dizioni: giacer
La prima cond
su uno stesso p
lele occorre n
ma anche stab

No

144. ***Teorem***
ad una retta,
Infatti, data
piano α da lor
ed una sola p
Dunque, il po
Diremo che u
retta r, se la

No

145. ***Teoren***
di esse, incon
Siano r ed
in un punto

2º **Caso.** - *Il punto dato P non appartenga al piano assegnato α.*

Consideriamo sul piano α una qualunque retta q e conduciamo per P il piano β perpendicolare alla q.

Se nel piano β conduciamo per P la perpendicolare PO all'intersezione s dei due piani α e β, otteniamo la perpendicolare richiesta.

Osserviamo infatti che la retta q è perpendicolare al piano β e che la retta s che passa per il suo piede Q è perpendicolare alla retta PO giacente su β, quindi per il teorema delle tre perpendicolari, la retta PO è perpendicolare alla retta che unisce il nuovo piede O con un qualunque punto T della prima perpendicolare q.

La retta PO è perciò perpendicolare alle due rette OQ e OT giacenti su α e quindi è perpendicolare a tale piano.

Essa è la sola. Infatti se per il punto P passassero due rette PO e PO' entrambe perpendicolari al piano α, si potrebbero condurre nello stesso piano POO' due perpendicolari da un punto P ad una retta OO', il che è assurdo.

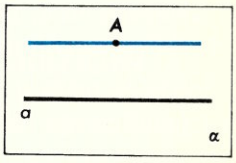
RETTE PARALLELE NELLO SPAZIO

143. Ricorderete che due rette si dicono parallele se soddisfano a due condizioni: giacere in uno stesso piano e non avere alcun punto in comune.

La prima condizione è soddisfatta se ci limitiamo a considerare figure situate su uno stesso piano. Nello spazio invece, per decidere se due rette sono parallele occorre non solo dimostrare che non hanno alcun punto in comune, ma anche stabilire che esse sono situate su uno stesso piano.

144. *Teorema.* - **Per un qualunque punto dello spazio, non appartenente ad una retta, si può condurre a questa una parallela ed una sola.**

Infatti, data una retta a ed un punto A non appartenente ad essa, nel piano α da loro individuato si può condurre da A una ed una sola parallela alla retta a.



Dunque, il postulato di Euclide vale anche nello spazio.

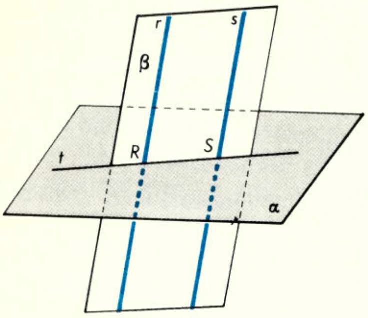
Diremo che una retta s ha la stessa *direzione* di una retta r, se la retta s è parallela alla retta r.

145. *Teorema.* - **Se due rette sono parallele, ogni piano che incontra una di esse, incontra anche l'altra.**

Siano r ed s due rette parallele ed α un piano che intersechi la retta r in un punto R. Vogliamo dimostrare che il piano α interseca anche la retta s.

Infatti, le due rette r ed s essendo parallele individuano un piano β, distinto da α, che per ipotesi interseca la retta r nel punto R.

Ne consegue che i due piani α e β avendo in comune il punto R devono avere in comune una retta t passante per R (**133**).



Questa giacendo sul piano β ed intersecando la retta r, risulterà anche incidente alla parallela s in un punto S.

Dunque il piano α e la retta s hanno in comune il punto S; perciò sotto forma simbolica possiamo scrivere:

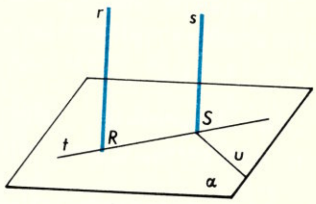
$$\{r \parallel s\,, \quad R = r \cap \alpha\} \Rightarrow S = s \cap \alpha\,.$$

No

146. *Teorema.* - **Due rette perpendicolari ad uno stesso piano sono parallele.**

Siano r ed s due rette perpendicolari ad un piano α rispettivamente nei punti R ed S; dimostriamo che esse sono parallele, che cioè non hanno alcun punto in comune e che giacciono su uno stesso piano.

Cominciamo con l'osservare che le due rette r ed s non possono avere alcun punto in comune perché se si incontrassero in un punto, per questo si potrebbero condurre due perpendicolari distinte ad uno stesso piano, il che è assurdo (**142**).



Dimostriamo ora che le rette r ed s sono complanari; a tale scopo conduciamo nel piano α la retta u perpendicolare in S alla congiungente $t = RS$.

Poiché la retta r è perpendicolare al piano α ed u è perpendicolare alla retta t, giacente su α, per il teorema delle tre perpendicolari (**141**) si può affermare che la retta u è perpendicolare al piano delle due rette r e t.

Inoltre la retta u essendo perpendicolare in S sia alla retta s, sia alla retta t è perpendicolare (**139**) al piano delle due rette s e t.

Ne consegue che i due piani rt ed st essendo entrambi perpendicolari alla retta u nel suo punto S, devono coincidere (**140**), quindi le rette r ed s giacciono su uno stesso piano.

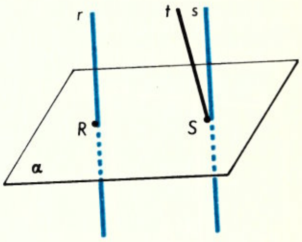
Resta così dimostrato che esse sono parallele; dunque possiamo scrivere

$$\{r \perp \alpha\,, \; s \perp \alpha\} \Rightarrow r \parallel s\,.$$

NO

147. ***Teorema.*** **- Se una retta è perpendicolare ad un piano, ogni sua parallela è perpendicolare a quel piano.**

Vogliamo dimostrare che se r ed s sono due rette parallele ed r è perpendicolare ad un piano α, anche la retta s è perpendicolare a tale piano.



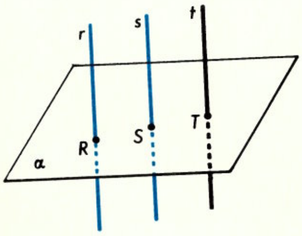
Infatti, se la retta s non fosse perpendicolare al piano α potremmo condurre per il punto S, intersezione di s con α, la perpendicolare t a questo piano. Allora, per il teorema precedente, le due rette r e t entrambe perpendicolari ad α, sarebbero fra loro parallele e quindi per il punto S si potrebbero condurre due parallele distinte s e t alla retta r, il che è assurdo (**144**).

Dunque, la retta s è perpendicolare al piano α; possiamo quindi scrivere:

$$\{r \perp \alpha\,,\ s \parallel r\} \Rightarrow s \perp \alpha\,.$$

NO

148. ***Teorema.*** **- Nello spazio, due rette parallele ad una terza sono parallele fra loro.**



Vogliamo dimostrare che se r ed s sono due rette entrambe parallele ad una terza retta t, sono parallele fra loro.

Infatti, un piano α che sia condotto perpendicolarmente alla retta t sarà, per il teorema precedente, perpendicolare sia alla retta r, sia alla retta s.

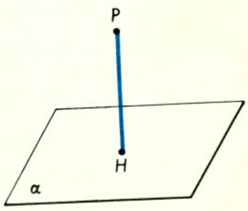
Ne consegue che le due rette r ed s, essendo perpendicolari ad uno stesso piano α, sono parallele fra loro (**146**). Dunque:

$$\{r \parallel t\,,\ s \parallel t\} \Rightarrow r \parallel s\,.$$

X

PROIEZIONI, SEGMENTI OBLIQUI E LORO PROIEZIONI

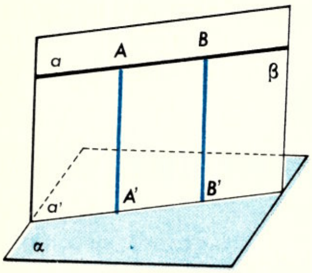
149. Sia dato un piano α ed un punto P non appartenente ad esso. Se conduciamo da P la perpendicolare al piano α, il piede H di tale perpendicolare si dice **proiezione** di P sul piano α.



La proiezione di una figura su un piano è la figura costituita dalle proiezioni sopra il piano di tutti i punti della data figura.

150. ***Teorema.*** **- Le perpendicolari condotte ad un piano dai punti di una retta non perpendicolare a questo, sono tutte situate su uno stesso piano ed i loro piedi sono su una stessa retta.**

Sia α un piano ed a una retta non appartenente al piano e non perpendicolare ad esso. Preso un qualunque punto A su a conduciamo la perpendicolare ad α e sia A' il piede della perpendicolare.



Vogliamo dimostrare che tutte le perpendicolari al piano α condotte per i punti della retta a, appartengono al piano β individuato dal punto A' e dalla retta a, e che i loro piedi appartengono all'intersezione a' dei due piani α e β.

Infatti, se B è un qualunque punto della retta a e B' è il piede della perpendicolare condotta da B ad α, le due rette AA' e BB' essendo entrambe perpendicolari ad α sono parallele (**146**), e quindi giacciono su uno stesso piano che è il piano β determinato dal punto A' e dalla retta a.

Inoltre il piede B' appartenendo sia al piano α, sia al piano β, apparterrà necessariamente alla loro intersezione a'. Dunque:

La proiezione di una retta su di un piano non perpendicolare ad essa, è una retta.

Se la retta è perpendicolare al piano, la sua proiezione su di essa è un punto.

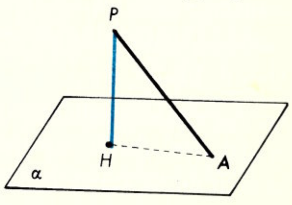
La proiezione di un segmento su un piano è il segmento avente per estremi le proiezioni sul piano degli estremi del segmento dato.

Se un segmento ha un estremo su un piano senza essere a questo perpendicolare, si dice **obliquo** al piano.

Stabiliamo ora alcune notevoli relazioni fra i segmenti obliqui condotti da un punto ad un piano, e le loro proiezioni su di esso.

151. ***Teorema.*** **- Il segmento di perpendicolare condotto ad un piano da un punto non appartenente ad esso, è minore di ogni obliqua passante per quel punto.**

Dato il punto P non situato sul piano α, sia PH il segmento di perpendicolare al piano e PA una obliqua qualsiasi.



Poiché PH è perpendicolare ad α, è perpendicolare alla retta HA, ed allora dal triangolo rettangolo HPA, si ha:

$$PH < PA\,.$$

Il segmento PH di dice **distanza** del punto P dal piano α, si ha quindi la seguente

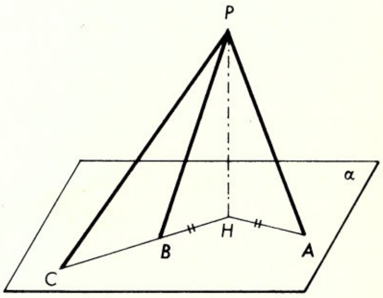
***Definizione.* - La distanza di un punto da un piano è il segmento di perpendicolare abbassato da quel punto al piano.**

152. ***Teorema.* - Se due segmenti obliqui, condotti da un punto ad un piano hanno proiezioni congruenti sono congruenti; se hanno proiezioni disuguali, sono disuguali ed è maggiore quello che ha proiezione maggiore.**

1. - *I due segmenti obliqui hanno proiezioni congruenti.*

Se i due segmenti obliqui PA e PB hanno sul piano α proiezioni congruenti, se cioè $HA \cong HB$, i due triangoli rettangoli PHA e PHB, avendo: $HA \cong HB$ per ipotesi e PH in comune, sono congruenti e perciò si avrà anche:

$$PA \cong PB .$$



2. - *I due segmenti hanno proiezioni disuguali.*
Se i due segmenti obliqui PA e PC hanno sul piano α proiezioni disuguali, se ad es. è $HC > HA$, staccando su HC il segmento $HB \cong HA$, si avrà per il caso precedente

$$PB \cong PA . \tag{1}$$

Poiché il triangolo PHB è rettangolo, l'angolo $\widehat{PBH}$ è acuto, quindi il suo adiacente $\widehat{PBC}$ è ottuso; ne consegue che il triangolo PBC è ottusangolo e perciò il suo lato maggiore è quello opposto all'angolo ottuso. Dunque, si ha:

$$PC > PB , \qquad \text{ossia per la (1)} \qquad PC > PA .$$

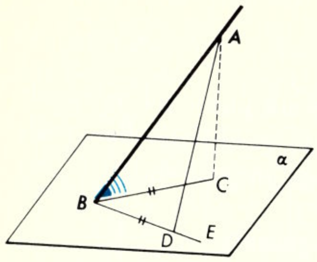
Si ha poi inversamente, che:

Se da un punto non appartenente ad un piano si conducono due segmenti obliqui congruenti, le loro proiezioni sono congruenti; se i due segmenti obliqui non sono congruenti, le loro proiezioni non sono congruenti, ed il maggiore ha proiezione maggiore.

Angolo di una retta con un piano.

153. ***Teorema.* - Se una retta è obliqua ad un piano, l'angolo acuto che essa forma con la sua proiezione sul piano è minore dell'angolo che tale obliqua forma con ogni retta del piano passante per il suo punto d'intersezione con il piano.**

Sia AB una retta qualunque non perpendicolare al piano α e che lo intersechi nel punto B, e sia C la proiezione su α del punto A, e quindi BC la proiezione della retta AB su α.



Vogliamo dimostrare che l'angolo che AB forma con la sua proiezione BC è minore dell'angolo che essa forma con una qualsiasi altra retta BE situata sul piano α e passante per B, cioè, che:

$$\widehat{ABC} < \widehat{ABE}\,.$$

Infatti, se stacchiamo sulla retta BE il segmento $BD \cong BC$ e congiungiamo A con D, osserviamo che i due triangoli ABC ed ABD hanno:

$$AB \text{ comune}, \quad BC \cong BD \quad \text{ed} \quad AC < AD \ (\mathbf{151}),$$

quindi gli angoli opposti ai loro lati disuguali sono disuguali nello stesso verso, dunque si ha:

$$\widehat{ABC} < \widehat{ABD}$$

che era quanto si voleva dimostrare.

L'angolo $\widehat{ABC}$ si dice angolo che la retta AB forma con il piano α; si ha perciò la seguente:

Definizione. **- L'angolo acuto che una obliqua ad un piano forma con la sua proiezione sul piano, si dice angolo della retta con il piano.**

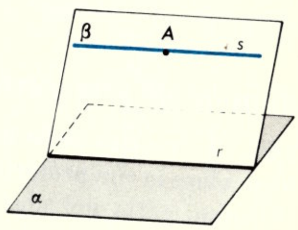
RETTE E PIANI PARALLELI

Si è stabilito (**131**) che una retta s, non appartenente ad un piano α, può avere con questo al più un punto in comune; se non ne ha alcuno, la retta ed il piano si dicono **paralleli.** L'esistenza effettiva di rette parallele ad un piano assegnato è dimostrata dal seguente:

154. ***Teorema.*** **- Una retta parallela ad una retta di un piano e passante per un punto esterno ad esso, è parallela al piano.**

Sia α il piano assegnato, r una qualunque retta giacente su α ed A un punto esterno a tale piano.

Dimostriamo che la retta s, passante per A e parallela ad r è parallela al piano α.



Infatti, le due rette parallele r ed s determinano un piano β che è distinto da α perché contiene il punto A esterno a questo piano; dunque i due piani α e β hanno in comune i soli punti della loro intersezione r.

Ne consegue
P, questo ap
alla loro inter
il che è impo
Dunque, la re
perciò paralle

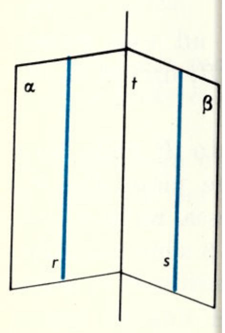
Poiché per un
alle infinite re
Per ogni punt
parallele a que

155. ***Teorem***
piano che inter
considerata.

Sia s una rett
piano passante
piano α secon
rette r ed s s
Infatti, se non
la retta r in un
α il che è cont
Dunque, le rett

156. Un'immed

Corollario. **- S**
gliano, la loro i



Ne consegue che se la retta s avesse in comune con il piano α un punto P, questo appartenendo sia al piano α, sia al piano β, apparterrebbe anche alla loro intersezione; allora le rette r ed s avrebbero in comune il punto P, il che è impossibile perché per ipotesi esse sono rette parallele.

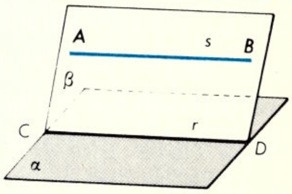
Dunque, la retta s ed il piano α non hanno alcun punto in comune e sono perciò parallele. Possiamo quindi scrivere:

$$\{A \in s\,,\quad A \notin \alpha\,,\quad r \subset \alpha\,,\quad s \parallel r\} \Rightarrow s \cap \alpha = \varnothing\,.$$

Poiché per un punto A esterno ad un piano si possono condurre le parallele alle infinite rette giacenti su quel piano, segue che:

Per ogni punto esterno ad un piano si possono condurre innumerevoli rette parallele a quel piano.

155. ***Teorema.*** **- Se per una retta parallela ad un piano si conduce un piano che intersechi il primo, l'intersezione dei due piani è parallela alla retta considerata.**



Sia s una retta parallela ad un piano α e β un piano passante per la retta s e che intersechi il piano α secondo la retta r; dimostriamo che le rette r ed s sono parallele.

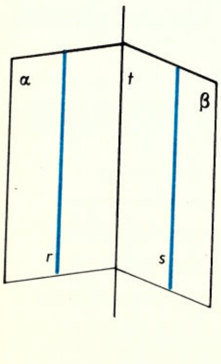
Infatti, se non lo fossero la retta s incontrerebbe la retta r in un punto e quindi avrebbe tale punto in comune con il piano α il che è contro l'ipotesi fatta.

Dunque, le rette r ed s sono parallele. Sotto forma simbolica:

$$\{s \parallel \alpha\,,\ s \subset \beta\,,\ \alpha \cap \beta = r\} \Rightarrow s \parallel r\,.$$

156. Un'immediata conseguenza del precedente teorema è il seguente

Corollario. **- Se per due rette parallele si conducono due piani che si tagliano, la loro intersezione è parallela alle due rette considerate.**



Siano r ed s due rette parallele ed α e β due piani passanti rispettivamente per essi, e che si intersechino secondo la retta t.

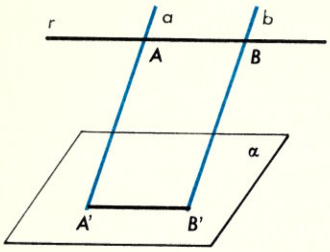
Dimostriamo che t è parallela ad r ed s.

Infatti, poiché r è parallela ad s è anche parallela al piano β, e quindi (**155**), il piano α condotto per r interseca il piano β secondo la retta t parallela alla r e quindi anche alla s (**148**). Dunque:

$$\{r \parallel s\,,\ r \subset \alpha\,,\ s \subset \beta\,,\ \alpha \cap \beta = t\} \Rightarrow t \parallel r\,,\ t \parallel s\,.$$

157. ***Teorema.* - Segmenti di rette parallele comprese fra una retta ed un piano paralleli, sono congruenti.**

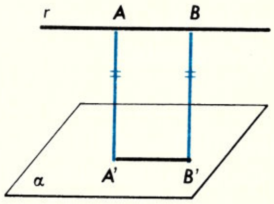
Sia r una retta parallela ad un piano α. Fissati su essa due qualsiasi punti A e B, conduciamo per essi le due rette parallele a e b che intersecheranno il piano α nei punti A' e B'.



La retta $A'B'$ intersezione del piano α con il piano delle due parallele a e b sarà parallela ad r (**155**), e quindi il quadrilatero $AA'B'B$ è un parallelogrammo, pertanto sarà

$$AA' \cong BB' .$$

158. Poiché la distanza di un punto da un piano è il segmento di perpendicolare condotto da quel punto al piano, si deduce che:



Se una retta è parallela ad un piano i suoi punti sono equidistanti dal piano.

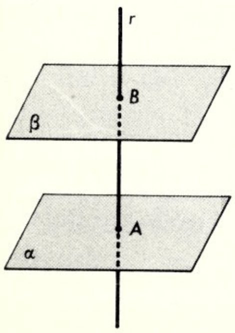
Questo teorema giustifica la seguente

***Definizione.* - Si dice distanza di una retta parallela ad un piano, dal piano, la distanza di un punto qualunque della retta dal piano.**

PIANI PARALLELI

159. Si è stabilito (**133**) che se due piani hanno in comune un punto, hanno anche in comune una retta passante per quel punto, e si dicono secanti. Se invece due piani non hanno alcun punto in comune si dicono **paralleli.** L'esistenza effettiva di piani paralleli è dimostrata dal seguente:

160. ***Teorema.* - Due piani perpendicolari ad una stessa retta in due punti distinti, sono paralleli.**

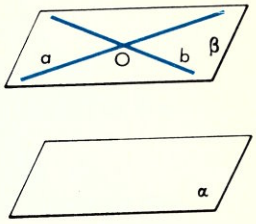


Siano α e β due piani perpendicolari ad una stessa retta r, rispettivamente nei punti A e B; dimostriamo che essi sono paralleli.

Infatti, se non lo fossero, per un punto P della loro intersezione si potrebbero condurre due piani distinti α e β entrambi perpendicolari alla stessa retta r. Ciò è assurdo (**140**), dunque i due piani α e β sono paralleli. Brevemente:

$$\{\alpha \perp r\ ,\ \beta \perp r\} \Rightarrow \alpha \parallel \beta\ .$$

161. ***Teorema.*** **- Se per un punto esterno ad un piano si conducono due rette ad esso parallele, il piano individuato da tali rette è parallelo al piano dato.**

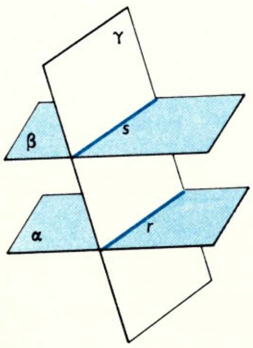


Siano a e b due rette distinte parallele al piano α, condotte da un punto O esterno ad esso; dimostriamo che il piano β individuato dalle due rette a e b è parallelo al piano α.

Infatti, se i due piani α e β non fossero paralleli si intersecherebbero secondo una retta che dovrebbe essere (**155**) parallela a ciascuna delle due rette incidenti a e b. Ciò è assurdo, dunque è vero che il piano β è parallelo al piano α; sotto forma simbolica:

$$\{a \parallel \alpha\,,\ b \parallel \alpha\,,\ a \cap b = O\} \Rightarrow \textit{piano}\ (a,\ b) \parallel \alpha\,.$$

162. ***Teorema.*** **- Le intersezioni di due piani paralleli con un altro piano che li incontra, sono rette parallele.**



Siano α e β due piani paralleli ed r ed s le loro rispettive intersezioni con un altro piano γ; dimostriamo che le due rette r ed s sono parallele. Infatti, esse sono complanari perché appartengono allo stesso piano γ, e giacendo sui piani paralleli α e β non possono avere alcun punto in comune; perciò le rette r ed s sono parallele. Dunque:

$$\{\alpha \parallel \beta\,,\ \gamma \cap \alpha = r, \gamma \cap \beta = s\} \Rightarrow r \parallel s\,.$$

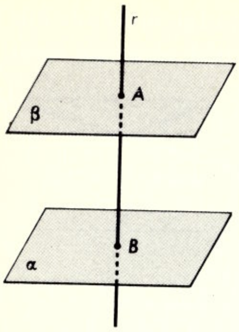
163. Si possono inoltre dimostrare i seguenti teoremi di cui ci limitiamo a dare l'enunciato.

1. - *Se due piani sono paralleli ed una retta incontra uno di essi, incontra anche l'altro.*

2. - *Se due piani sono paralleli, ogni retta perpendicolare ad uno di essi è perpendicolare anche all'altro.*

Dimostriamo ora l'esistenza e l'unicità del piano parallelo ad un piano dato e passante per un punto esterno ad esso.

164. ***Teorema.*** **- Per un punto esterno ad un piano, si può condurre un piano ed uno solo, parallelo al piano dato.**



Sia dato un piano α ed un punto A non appartenente ad esso; vogliamo dimostrare che per A si può condurre un solo piano parallelo ad α.

Conduciamo dal punto A la perpendicolare AB al piano α; il piano β perpendicolare ad AB nel punto A è parallelo al piano α perché sono entrambi perpendicolari alla retta AB (**160**).

Tale piano è unico, infatti se per il punto A si potesse condurre un altro piano parallelo ad α, anche esso dovrebbe risultare perpendicolare alla retta AB nel punto A, e ciò è impossibile perché per un punto A dato su una retta, si può condurre un solo piano perpendicolare ad essa (**140**).

Dal teorema precedente si deducono facilmente i seguenti corollari:

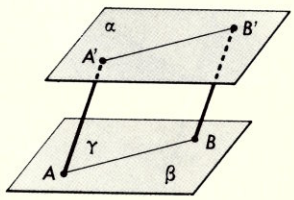
Due piani α e β paralleli ad un terzo piano γ, sono paralleli fra loro.

Se due piani sono paralleli, ogni piano che incontra uno di essi, incontra anche l'altro.

165. *Teorema.* - **Segmenti paralleli, compresi fra piani paralleli sono congruenti.**

Vogliamo dimostrare che se α e β sono due piani paralleli ed AA' e BB' due segmenti paralleli compresi fra essi, si ha:

$$AA' \cong BB' .$$



Infatti, il piano γ delle due rette parallele AA' e BB' interseca i piani α e β secondo due rette parallele AB ed $A'B'$ (**162**). Ne consegue che il quadrilatero $ABB'A'$ avendo i lati a due a due paralleli è un parallelogrammo e quindi i suoi lati opposti AA' e BB' sono congruenti.

166. Come caso particolare, se i segmenti AA' e BB' sono perpendicolari ai due piani, la figura $ABB'A'$ diventa un rettangolo, e si ha il seguente:

Corollario. - **Segmenti di perpendicolari compresi fra due piani paralleli sono congruenti.**

Poiché la distanza di un punto da un piano è il segmento di perpendicolare condotto da quel punto al piano, possiamo anche dire che:

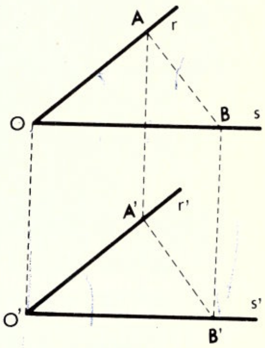
Se due piani sono paralleli, i punti dell'uno sono equidistanti dall'altro.

167. ***Teorema.* - Se due angoli, non situati su uno stesso piano, hanno i lati rispettivamente paralleli e concordi sono congruenti, e giacciono su piani paralleli.**

I due angoli $\widehat{AOB}$ ed $\widehat{A'O'B'}$, non situati su uno stesso piano, abbiano i lati paralleli e concordi; dimostriamo che sono congruenti.

A tale scopo, stacchiamo sui lati r ed s dell'angolo AOB due qualsiasi segmenti OA ed OB, e sui lati r' ed s' dell'angolo $\widehat{A'O'B'}$ i segmenti

$$O'A' \cong OA \qquad \text{ed} \qquad O'B' \cong OB\,.$$



Poiché il segmento $O'A'$ è per costruzione congruente ad OA, e per ipotesi parallelo ad esso, il quadrilatero $OAA'O'$ è un parallelogrammo, quindi si ha che:

(1) $\qquad AA'$ *è congruente e parallelo ad* OO'.

Analogamente, poiché il segmento $O'B'$ è congruente e parallelo al segmento OB, il quadrilatero $OBB'O'$ è un parallelogrammo, quindi si ha che

(2) $\qquad BB'$ *è congruente e parallelo ad* OO'.

Dalle (1) e (2) si deduce che

AA' *è congruente e parallelo a* BB',

dunque anche il quadrilatero $ABB'A'$ è un parallelogrammo, e per conseguenza si ha:

$$AB \cong A'B'\,.$$

Ne consegue allora che i due triangoli AOB ed $A'O'B'$, avendo:

$$OA \cong O'A'\,, \qquad OB \cong O'B' \qquad \text{ed} \qquad AB \cong A'B'\,,$$

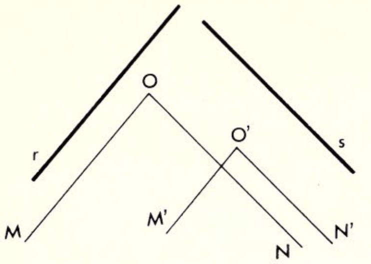
sono congruenti per il terzo criterio di congruenza, e quindi in particolare si ha:

$$\widehat{AOB} \cong \widehat{A'O'B'}\,.$$

I piani dei due angoli sono paralleli; infatti le rette r' ed s' essendo rispettivamente parallele alle rette r ed s, sono parallele al piano rs e quindi il piano dell'angolo $\widehat{A'O'B'}$ è parallelo al piano dell'angolo $\widehat{AOB}$ (**161**).

168. *Angolo di due rette sghembe.*

Date due rette sghembe r ed s, gli angoli formati da due rette OM ed ON parallele alle date e condotte per un punto O dello spazio, sono ordinatamente congruenti agli angoli delle parallele $O'M'$ ed $O'N'$ condotte alle rette r ed s da un qualsiasi altro punto O' dello spazio (**167**). Tali angoli sono cioè indipendenti dalla posizione del punto O nello spazio.



L'angolo acuto, o retto, formato dalle parallele a due rette sghembe condotte da un qualsiasi punto dello spazio, si dice angolo delle rette sghembe considerate.

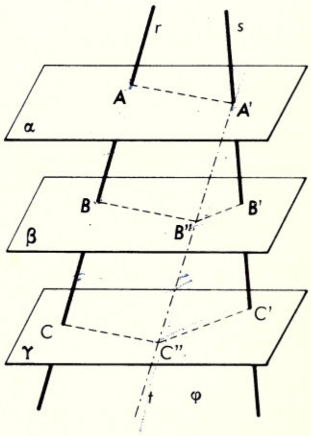
Due rette sghembe si dicono ortogonali se il loro angolo è retto.

TEOREMA DI TALETE

Consideriamo più piani paralleli, o come si dice un *fascio* di piani paralleli ed estendiamo il teorema di Talete (**35**) nello spazio.

Se due trasversali incontrano i piani di un fascio, diremo corrispondenti i segmenti delle trasversali compresi fra gli stessi piani.

169. *Teorema.* - Un fascio di piani paralleli determina, su due trasversali qualunque, segmenti proporzionali.



Siano α, β, γ, tre piani paralleli intersecati da due trasversali r ed s rispettivamente nei punti A, B, C ed A', B', C'; vogliamo dimostrare che:

$$AB : BC = A'B' : B'C' .$$

Infatti, se le due rette r ed s sono complanari, il loro piano interseca i piani α, β, γ, secondo tre rette parallele e quindi la proposizione enunciata è vera perché si riduce al teorema di Talete nel piano.

Se invece r ed s sono sghembe, si conduca da A' la parallela t alla retta r; le due rette s e t avendo in comune il punto A' sono complanari e quindi determinano un piano φ che intersecherà β e γ secondo le rette parallele $B'B''$ e $C'C''$. Allora per il teorema di Talete sarà:

$$A'B'' : B''C'' = A'B' : B'C' . \tag{1}$$

Ma $A'B'' \cong AB$, $B''C'' \cong BC$, perché segmenti di parallele compresi fra piani paralleli (**165**), quindi la (1) diventa:

$$AB : BC = A'B' : B'C' .$$

capitolo decimo

DIEDRI - PIANI PERPENDICOLARI - ANGOLOIDI

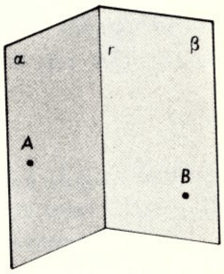
DIEDRI

170. ***Definizione.*** **- Si dice angolo diedro, o semplicemente diedro, ciascuna delle due parti in cui lo spazio viene diviso da due semipiani aventi la stessa origine.**

I due semipiani che individuano il dietro si dicono **facce** del diedro e la loro origine comune r prende il nome di costola, o **spigolo.**

I punti di un diedro non appartenenti alle due facce, si dicono interni al diedro.

Per indicare un diedro le cui facce siano i semipiani α e β si usa la scrittura $\widehat{\alpha\beta}$, oppure la notazione $\widehat{ArB}$, ove A e B sono due qualunque punti, uno della faccia α, l'altro della faccia β ed r è lo spigolo.



Se le due facce di un diedro sono una il prolungamento dell'altra, il diedro si dice piatto.

Se un diedro non è piatto, si dice **concavo** quello che contiene i prolungamenti delle facce e **convesso** l'altro.

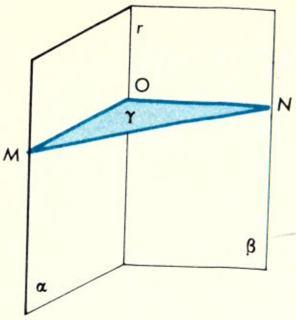
Osservate che il diedro convesso avente per facce i semipiani α e β è l'intersezione del semispazio avente per contorno il piano α e che contiene la faccia β, con il semispazio avente per contorno il piano β e che contiene la faccia α.

Ne consegue che un diedro convesso è una figura convessa. In quel che segue considereremo solo diedri convessi.

Le definizioni di diedri consecutivi, adiacenti, di somma o di differenza di due diedri, ecc., sono analoghe a quelle già studiate in geometria piana nel capitolo degli angoli.

171. *Sezione normale di un diedro.*

Si dice *sezione* di un diedro con un piano γ che intersechi il suo spigolo, l'angolo che ha per lati le intersezioni del piano con le facce del diedro.

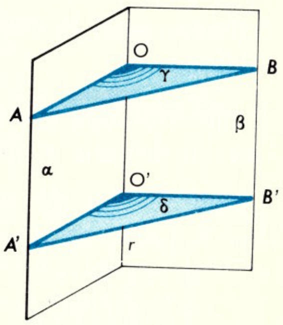


Se il piano γ è perpendicolare allo spigolo r del diedro, la sezione ottenuta si dice **sezione normale** del diedro. Dunque:

Si dice sezione normale di un diedro, l'angolo che si ottiene tagliando il diedro con un piano perpendicolare al suo spigolo.

172. Le sezioni normali di uno stesso diedro hanno la proprietà espressa dal seguente

Teorema. - **Le sezioni normali di uno stesso diedro sono congruenti.**



Due piani qualsiasi γ e δ, perpendicolari allo spigolo r del diedro $\widehat{ArB}$ rispettivamente nei punti O ed O', determinano due sezioni normali: $\widehat{AOB}$ ed $\widehat{A'O'B'}$; dimostriamo che sono congruenti.

Cominciamo con l'osservare che i piani γ e δ, essendo entrambi perpendicolari alla retta r, sono fra loro paralleli (**160**).

Sono perciò anche parallele (**162**) le rette OA ed $O'A'$, OB ed $O'B'$, e quindi sarà

$$\widehat{AOB} \cong \widehat{A'O'B'} ,$$

perché angoli aventi i lati rispettivamente paralleli e di versi concordi (**167**).

173. *Diedri congruenti.*

Due diedri, entrambi convessi, si dicono congruenti se con un movimento si possono sovrapporre uno sull'altro in modo che coincidano i loro spigoli e combacino le loro facce. Si può dimostrare che:

Se due diedri hanno sezioni normali congruenti sono congruenti, e viceversa.

Dunque, se $\widehat{\alpha\beta}$ ed $\widehat{\alpha'\beta'}$ sono due diedri ed $\widehat{AOB}$ ed $\widehat{A'O'B'}$ sono rispettivamente due loro sezioni normali, si ha:

$$\widehat{AOB} \cong \widehat{A'O'B'} \Leftrightarrow \widehat{\alpha\beta} \cong \widehat{\alpha'\beta'} .$$

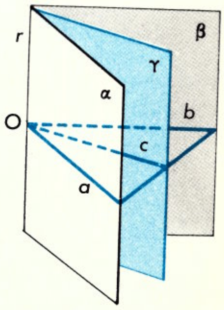
174. Si dice **ampiezza** di un diedro, quella di una delle sue sezioni normali, ed un diedro si dice *retto*, *acuto*, *ottuso*, secondo che la sua sezione normale è un angolo retto, acuto, o ottuso.

Due diedri si dicono **opposti allo spigolo** se le facce dell'uno sono i prolungamenti delle facce dell'altro. Risulta evidente che due diedri opposti allo spigolo avendo sezioni normali congruenti, sono congruenti.

Due diedri si dicono **supplementari** se le loro sezioni normali sono supplementari. Ne consegue che se due diedri sono adiacenti, sono supplementari ed in tal caso se uno di essi è un diedro retto, lo è anche l'altro.

175. *Semipiano bisettore di un diedro.*

Definizione. - **Si dice semipiano bisettore di un diedro, il semipiano avente per spigolo lo spigolo del diedro, e che lo divide in due diedri congruenti.**

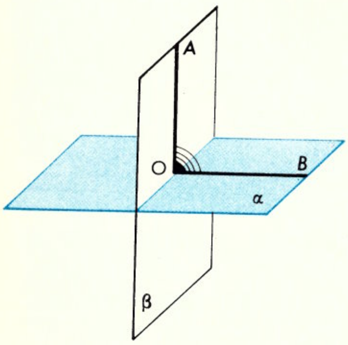


Sia dato il diedro $\widehat{\alpha\beta}$ e sia $\widehat{aOb}$ una sua sezione normale. Consideriamo la bisettrice c dell'angolo $\widehat{aOb}$ ed il semipiano γ avente per origine lo spigolo r del diedro, e contenente la retta c.

I diedri $\widehat{\alpha\gamma}$ e $\widehat{\beta\gamma}$ avendo congruenti le loro sezioni normali $\widehat{aOc}$ e $\widehat{bOc}$, sono congruenti, quindi γ è il semipiano bisettore del diedro considerato. Esso, come risulta dalla costruzione è individuato dallo spigolo del diedro e dalla bisettrice di una sua sezione normale.

PIANI PERPENDICOLARI

176. Due piani che si intersecano determinano quattro diedri; quelli opposti allo spigolo sono congruenti, e quelli adiacenti sono supplementari.



Se accade che uno di tali diedri è retto, lo sono anche gli altri tre ed in tal caso i due piani si dicono **perpendicolari.** Si ha dunque la seguente

Definizione. - **Due piani che intersecandosi determinano quattro diedri congruenti, si dicono perpendicolari.**

Poiché ciascuno dei quattro diedri determinati da due piani perpendicolari è un diedro retto, ed ha quindi per sezione normale un angolo retto, per poter affermare che due piani siano perpendicolari, basta dimostrare che la sezione normale di uno dei diedri da essi formati è un angolo retto.

Due piani che intersecandosi determinano diedri disuguali, si dicono **obliqui.**

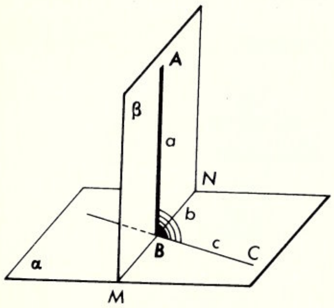
177. Il seguente teorema dimostra l'esistenza di piani perpendicolari.

Teorema. **- Se una retta è perpendicolare ad un piano, qualunque piano passante per essa è perpendicolare al piano dato.**

Sia AB una retta perpendicolare al piano α nel punto B e β un piano qualsiasi passante per essa.

Poiché i due piani α e β hanno in comune il punto B, hanno anche in comune una retta MN passante per B e perpendicolare ad AB.

Per il punto B, nel piano α, conduciamo la retta BC, perpendicolare alla retta MN.



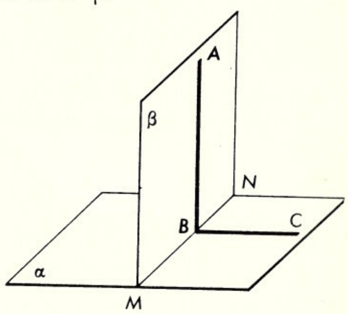
Poiché le rette AB e BC sono entrambe perpendicolari alla retta MN nel punto B, il loro piano ABC è perpendicolare ad MN e quindi l'angolo $\widehat{ABC}$ è una sezione normale del diedro $\alpha\beta$. E poiché AB essendo perpendicolare ad α è perpendicolare a BC, l'angolo $\widehat{ABC}$ di queste due rette è un angolo retto e quindi i piani α e β sono perpendicolari.

Brevemente possiamo scrivere:

$$\{a \perp \alpha\,,\ \beta \text{ piano passante per } a\} \Rightarrow \beta \perp \alpha\,.$$

178. Se due piani sono perpendicolari, ogni retta che appartiene ad uno di essi ed è perpendicolare alla loro intersezione è perpendicolare all'altro piano.

Siano α e β due piani perpendicolari ed AB una retta del piano β che sia perpendicolare all'intersezione MN dei due piani α e β.



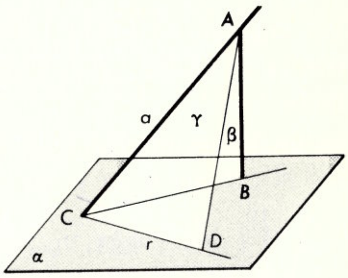
Vogliamo dimostrare che la retta AB è perpendicolare al piano α. Infatti, condotta per B nel piano α la retta BC perpendicolare ad MN, poiché MN è perpendicolare ad AB e BC, risulterà perpendicolare al loro piano e quindi l'angolo $\widehat{ABC}$ è una sezione normale del diedro $\widehat{\alpha\beta}$.

Ma questo diedro è retto perché i due piani α e β sono per ipotesi perpendicolari, quindi l'angolo $\widehat{ABC}$ è un angolo retto, perciò la retta AB essendo perpendicolare alle due rette MN e BC, risulterà perpendicolare al loro piano (**139**), cioè al piano α. Dunque:

$$\{\alpha \perp \beta\,;\ AB \in \beta\,,\ AB \perp (\alpha \cap \beta)\} \Rightarrow AB \perp \alpha\,.$$

179. *Teorema.* - **Per una retta che non sia perpendicolare ad un piano, si può condurre un solo piano perpendicolare al piano dato.**

Data una retta a non perpendicolare al piano α, vogliamo dimostrare che si può condurre per a un piano, ed uno solo, perpendicolare ad α.



Infatti, scelto un qualsiasi punto A sulla retta a, conduciamo da esso la retta AB perpendicolare ad α; il piano β determinato dalle rette a ed AB è perpendicolare al piano α (**177**).

Dimostriamo ora che esso è il solo piano passante per a e perpendicolare ad α.

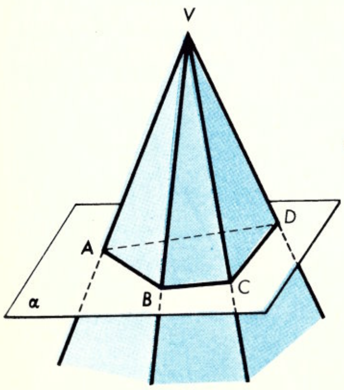
Infatti, se per a si potesse condurre un altro piano γ perpendicolare ad α, la perpendicolare AD condotta da A alla retta r intersezione dei due piani α e γ, risulterebbe perpendicolare al piano α (**178**). Allora per il punto A si potrebbero condurre due rette AB ed AD entrambe perpendicolari al piano α, il che è assurdo (**142**).

ANGOLOIDI

180. *Generalità.*

Dato in un piano α un poligono convesso $ABCD...$, congiungiamo un punto V esterno al piano con i vertici A, B, C, D, ... L'insieme degli angoli convessi $\widehat{AVB}$, $\widehat{BVC}$, $\widehat{CVD}$, ..., si dice **superficie piramidale indefinita.**

Questa superficie divide lo spazio in due regioni, ciascuna delle quali si dice **angoloide.**



Dei due angoloidi considereremo solo quello che contiene i punti interni al poligono $ABCD...$; esso prende il nome di **angoloide convesso.**

Le semirette VA, VB, VC, ..., sono gli **spigoli** dell'angoloide, la loro origine comune, cioè il punto V, prende il nome di **vertice** e gli angoli convessi formati da ogni spigolo col suo successivo, sono le **facce** dell'angoloide.

I diedri convessi alle cui facce appartengono due facce successive dell'angoloide sono i **diedri** dell'angoloide.

Osservate che un angoloide che abbia n spigoli può considerarsi come intersezione dei suoi n diedri.