Lezioni di Algebra Lineare con applicazioni alla Geometria Analitica
Errata Corrige

Fulvio Bisi, Francesco Bonsante, Sonia Brivio

Gli *errata* vengono evidenziati in rosso con una sottolineatura ondulata, le *correzioni* corrispondenti sono sempre in rosso **in carattere grassetto**.

Alcuni errori possono essere già stati corretti in fase di ristampa del libro.

Da ottobre 2019

Riportiamo di seguito gli errata corrige introdotti a partire dal 1° ottobre 2019. A seguire la lista degli errata-corrige aggiornati alle date marzo 2017 ottobre 2016, ottobre 2015, 28 febbraio 2015 e 31 dicembre 2014.

- Pagina 68:

Errata:

Le proprietà seguenti del prodotto scalare sono molto importanti:

PROPRIETÀ 1.11 $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{E}^3_O$ e $\forall k \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti proprietà:

(1) PROPRIETÀ COMMUTATIVA: $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle$;
(2) PROPRIETÀ DI OMOGENEITÀ $\langle k\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, k\boldsymbol{u} \rangle = k\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$;
(3) PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA $\langle (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}), \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$.

Corrige:

Le proprietà seguenti del prodotto scalare sono molto importanti:

PROPRIETÀ 1.11 $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{E}^3_O$ e $\forall k \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti proprietà:

(1) PROPRIETÀ COMMUTATIVA: $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle$;
(2) PROPRIETÀ DI OMOGENEITÀ $\langle k\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{\langle u, kv \rangle} = k\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$;
(3) PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA $\langle (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}), \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$.

- Pagina 230:

Errata:

Risulta ovvio che $\det(A_{(2)}) = 1$, quindi il rango è almeno 2. Ora, l'unica sottomatrice che possiamo costruire orlando $A_{(2)}$ è la matrice A stessa. Calcoliamone il determinante:

Corrige:

Risulta ovvio che $\det(A_{(2)}) = 1$, quindi il rango è almeno 2. Ora, l'unica **sottomatrice quadrata che** possiamo costruire orlando $A_{(2)}$ è la matrice A stessa. Calcoliamone il determinante:

- Pagina 264:

Errata:

Osserviamo che se $\mathrm{rg}(A) = n$, allora il sistema ammette solo la soluziona banale, quindi il sottospazio $\mathrm{Ker}\, A$ è il sottospazio che contiene solo il vettore nullo di $\mathbb{R}^n$, quindi $\dim \mathrm{Ker}\, A = 0$.

Corrige:

Osserviamo che se $\mathrm{rg}(A) = n$, allora il sistema ammette solo la **soluzione** banale, quindi il sottospazio $\mathrm{Ker}\, A$ è il sottospazio che contiene solo il vettore nullo di $\mathbb{R}^n$, quindi $\dim \mathrm{Ker}\, A = 0$.

- Pagina 438:

Errata:

Per la seconda parte, dall'osservazione precedente discende che l'insieme delle soluzioni del sistema formato dalle Equazioni (7.40) coincide con $(V^{\perp})^{\perp}$. Per la proprietà involutiva del complemento ortogonale, tale spazio coincide con V.

Corrige:

Per la seconda parte, dall'osservazione precedente discende che l'insieme delle soluzioni del sistema formato dalle Equazioni (7.40) coincide con $(V^{\perp})^{\perp}$. Per la proprietà **involutiva (Proprietà 7.26)** del complemento ortogonale, tale spazio coincide con V.

Da marzo 2017

Riportiamo di seguito gli errata corrige introdotti a partire dal 1° marzo 2017. A seguire la lista degli errata-corrige aggiornati alle date ottobre 2016, ottobre 2015, 28 febbraio 2015 e 31 dicembre 2014.

- Pagina 242:

Errata:

È immediato verificare che l'espressione ottenuta è proprio lo sviluppo sulla terza colonna del determinante scritto sopra.

Corrige:

È immediato verificare che l'espressione ottenuta è proprio lo sviluppo sulla terza **riga** del determinante scritto sopra.

Da ottobre 2016

Riportiamo di seguito gli errata corrige introdotti a partire dal 1°ottobre 2016. A seguire la lista degli errata-corrige aggiornati alle date ottobre 2015, 28 febbraio 2015 e 31 dicembre 2014.

- Pagina 29:

Errata:

Definizione 0.38. Se un polinomio $p(x) \in \mathbb{R}$ di grado $n \geq 1$ è il prodotto di n fattori lineari reali, non necessariamente distinti, $p(x)$ è detto *totalmente decomponibile* in $\mathbb{R}$ (o su $\mathbb{R}$):

$$p(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\dots(x - \alpha_n)\,, \qquad \alpha_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots, n\,.$$

Corrige:

Definizione 0.38. Se un polinomio $\boldsymbol{p(x)} \in \mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$ di grado $n \geq 1$ è il prodotto di n fattori lineari reali, non necessariamente distinti, $p(x)$ è detto *totalmente decomponibile* in $\mathbb{R}$ (o su $\mathbb{R}$):

$$p(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\dots(x - \alpha_n)\,, \qquad \alpha_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots, n\,.$$

Da ottobre 2015

Riportiamo di seguito gli errata corrige introdotti a partire dal 1°ottobre 2015. A seguire la lista degli errata-corrige aggiornati alle date del 28 febbraio 2015 e del 31 dicembre 2014.

- Pagina 210:

Errata:

In generale, scambiando due colonne *adiacenti* A^i e A^{i+1} di una matrice A, osserviamo che la matrice ottenuta cancellando la colonna A^i da A è uguale alla matrice ottenuta cancellando la colonna $(A')^{i+1}$ da A'. Pertanto sviluppando il determinante di A' sulla colonna $i+1$ otteniamo che per ogni termine vale l'uguaglianza:

$$(-1)^{(i+1+j)}a'_{i+1,j} \det A'_{[i+1,j]} = -(-1)^{(i+j)}a_{ij} \det A_{[i,j]} \,,$$

da cui ricaviamo che il determinante di A' è l'opposto del determinante di A.

Corrige:

In generale, scambiando due colonne *adiacenti* A^i e A^{i+1} di una matrice A, osserviamo che la matrice ottenuta cancellando la colonna A^i da A è uguale alla matrice ottenuta cancellando la colonna $(A')^{i+1}$ da A'. Pertanto sviluppando il determinante di A' sulla colonna $i+1$ otteniamo che per ogni termine vale l'uguaglianza:

$$(-1)^{(i+1+j)}a'_{\mathbf{j,i+1}} \det A'_{\mathbf{[j,i+1]}} = -(-1)^{(i+j)}a_{\mathbf{ji}} \det A_{\mathbf{[j,i]}} \,,$$

da cui ricaviamo che il determinante di A' è l'opposto del determinante di A.

- Pagina 211:

Errata:

In generale, sia A' la matrice ottenuta moltiplicando la colonna A^i di A per il numero λ. Sviluppando il determinante di A' sulla colonna i-esima, osserviamo che per ogni termine vale l'uguaglianza:

$$(-1)^{(i+j)}a'_{ij} \det A'_{[i,j]} = (-1)^{(i+j)}(\lambda a_{ij}) \det A_{[i,j]} = \lambda(-1)^{(i+j)}a_{ij} \det A_{[i,j]} \,,$$

da cui ricaviamo che $\det A' = \lambda \det A$.

Corrige:

In generale, sia A' la matrice ottenuta moltiplicando la colonna $\boldsymbol{A^j}$ di A per il numero λ. Sviluppando il determinante di A' sulla colonna $\boldsymbol{j}$-esima, osserviamo che per ogni termine vale l'uguaglianza:

$$(-1)^{(i+j)}a'_{ij} \det A'_{[i,j]} = (-1)^{(i+j)}(\lambda a_{ij}) \det A_{[i,j]} = \lambda(-1)^{(i+j)}a_{ij} \det A_{[i,j]} \,,$$

da cui ricaviamo che $\det A' = \lambda \det A$.

Da gennaio 2015 al 30 settembre 2015

Riportiamo di seguito gli errata corrige introdotti a partire dal 1° gennaio 2015 fino al 30 settembre 2015; A seguire la lista degli errata-corrige aggiornata alla data del 31 dicembre 2014.

- Pagina $14-15$:

Errata:

- Le funzioni $f(x) = x^2$ e $f(x) = \sin x$ non sono suriettive. Verifichiamo che $f(x) = x^2$ non è suriettiva. Basta provare l'esistenza di un numero reale $y \in \mathbb{R}$ per cui l'equazione $f(x) = y$ non ammetta soluzioni reali. Osserviamo che se $y < 0$ l'equazione $x^2 = y$ non amette soluzioni reali, per cui possiamo concludere che f non è suriettiva.

Corrige:

- Le funzioni $f(x) = x^2$ e $f(x) = \sin x$ non sono suriettive. Verifichiamo che $f(x) = x^2$ non è suriettiva. Basta provare l'esistenza di un numero reale $y \in \mathbb{R}$ per cui l'equazione $f(x) = y$ non ammetta soluzioni reali. Osserviamo che se $y < 0$ l'equazione $x^2 = y$ non **ammette** soluzioni reali, per cui possiamo concludere che f non è suriettiva.

- Pagina 133:

Errata:

LEMMA 2.11. Sia V uno spazio vettoriale reale, $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k \in V$ e $\boldsymbol{v} \in V$. Valgono le seguenti proprietà:

(1) Se $\boldsymbol{v} \in \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k)$ allora $\mathrm{Span}(\boldsymbol{v}) \subset \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k)$;
(2) $\mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k) \subset \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v})$;
(3) se $\boldsymbol{v} \in \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k)$ allora

$$\mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k) = \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v})$$

e $\boldsymbol{v}$ viene detto *superfluo*.

OSSERVAZIONE 2.22. La Proprietà (2) del Lemma 2.11 ha il seguente significato: se ad una lista di vettori $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ aggiungiamo un vettore $\boldsymbol{v}$, lo Span della nuova lista **contiene** lo Span della vecchia lista.

La Proprietà 3, invece, precisa che quando il vettore $\boldsymbol{v}$ è contenuto esso stesso nello Span della vecchia lista, allora lo Span della nuova lista **coincide** con lo Span della vecchia lista.

Corrige:

PROPOSIZIONE 2.11. Sia V uno spazio vettoriale reale, $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k \in V$ e $\boldsymbol{v} \in V$. Valgono le seguenti proprietà:

(1) Se $\boldsymbol{v} \in \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k)$ allora $\mathrm{Span}(\boldsymbol{v}) \subset \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k)$;
(2) $\mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k) \subset \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v})$;
(3) se $\boldsymbol{v} \in \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k)$ allora

$$\mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k) = \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v})$$

e $\boldsymbol{v}$ viene detto ***(generatore) superfluo***.

OSSERVAZIONE 2.22 La Proprietà (2) della **Proposizione** 2.11 ha il seguente significato: se ad una lista di vettori $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ aggiungiamo un vettore $\boldsymbol{v}$, lo Span della nuova lista **contiene** lo Span della vecchia lista.

La Proprietà 3, invece, precisa che quando il vettore $\boldsymbol{v}$ è contenuto esso stesso nello Span della vecchia lista, allora lo Span della nuova lista **coincide** con lo Span della vecchia lista.

- Pagina 134:

Errata:

OSSERVAZIONE 2.23. Possiamo dire che

(1) I vettori $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ generano V se e solo se ogni vettore $\boldsymbol{v} \in V$ è ottenibile come combinazione lineare di $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$, ovvero se e solo se per ogni $\boldsymbol{v} \in V$ esistono $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tali che
$$\boldsymbol{v} = \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{u}_k .$$
(2) Per la Proprietà (1) del Lemma 2.11, segue che se $L = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k\}$ è una lista di generatori di V, allora ogni altra lista ottenuta aggiungendo ad L altri vettori di V continua ad essere una lista di generatori di V.

Corrige:

OSSERVAZIONE 2.23. Possiamo dire che

(1) I vettori $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ generano V se e solo se ogni vettore $\boldsymbol{v} \in V$ è ottenibile come combinazione lineare di $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$, ovvero se e solo se per ogni $\boldsymbol{v} \in V$ esistono $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tali che
$$\boldsymbol{v} = \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{u}_k .$$
(2) Per la Proprietà (1) della **Proposizione** 2.11, segue che se $L = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k\}$ è una lista di generatori di V, allora ogni altra lista ottenuta aggiungendo ad L altri vettori di V continua ad essere una lista di generatori di V.

- Pagina 147:

Errata:

Poiché $\boldsymbol{u}_5 \in \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4)$ allora abbiamo visto (Lemma 2.11(1)) che
$$\mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4, \boldsymbol{u}_5) = \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4) .$$

Corrige:

Poiché $\boldsymbol{u}_5 \in \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4)$ allora abbiamo visto (**Proposizione** 2.11(1)) che
$$\mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4, \boldsymbol{u}_5) = \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4) .$$

- Pagina 148:

Errata:

Per verificare che $\mathrm{Span}\, L' = \mathrm{Span}\, L$, possiamo ragionare come sopra. Infatti osserviamo che a ciascun passo possiamo modificare la lista L, ma lo Span rimane uguale. La cosa è chiara quando non cancelliamo il vettore che stiamo considerando (in questo caso non modifichiamo la lista). Del resto, nel caso in cui cancelliamo un vettore, questo risulta essere combinazione lineare dei precedenti (è un generatore superfluo, Lemma 2.11(3)), pertanto, eliminandolo, lo Span risulta invariato.

Corrige:

Per verificare che $\mathrm{Span}\, L' = \mathrm{Span}\, L$, possiamo ragionare come sopra. Infatti osserviamo che a ciascun passo possiamo modificare la lista L, ma lo Span rimane uguale. La cosa è chiara quando non cancelliamo il vettore che stiamo considerando (in questo caso non modifichiamo la lista). Del resto, nel caso in cui cancelliamo un vettore, questo risulta essere combinazione lineare dei precedenti (è un generatore superfluo, **Proposizione** 2.11(3)), pertanto, eliminandolo, lo Span risulta invariato.

- Pagina 256:

Errata:
Infatti, osserviamo che:

- se $B \in \mathrm{Span}(A^1, A^2, \dots, A^n)$, allora B è un generatore superfluo per il sottospazio $\mathrm{Span}(A^1, \dots, A^n, B)$ (Lemma 2.11(3)) e quindi risulta
$$\mathrm{Span}(A^1, \dots, A^n, B) = \mathrm{Span}(A^1, \dots, A^n)\,,$$
che implica $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\tilde{A})$;
- se $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\tilde{A})$, allora i sottospazi $\mathrm{Span}(A^1, \dots, A^n, B)$ e $\mathrm{Span}(A^1, \dots, A^n)$ hanno la stessa dimensione, ma poiché si ha (Lemma 2.11(2))
$$\mathrm{Span}(A^1, \dots, A^n) \subset \mathrm{Span}(A^1, \dots, A^n, B)\,,$$
i due sottospazi coincidono ed in particolare $B \in \mathrm{Span}(A^1, A^2, \dots, A^n)$ (Proposizione 2.29).

$\square$

Corrige:
Infatti, osserviamo che:

- se $B \in \mathrm{Span}(A^1, A^2, \dots, A^n)$, allora B è un generatore superfluo per il sottospazio $\mathrm{Span}(A^1, \dots, A^n, B)$ (**Proposizione** 2.11(3)) e quindi risulta
$$\mathrm{Span}(A^1, \dots, A^n, B) = \mathrm{Span}(A^1, \dots, A^n)\,,$$
che implica $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\tilde{A})$;
- se $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\tilde{A})$, allora i sottospazi $\mathrm{Span}(A^1, \dots, A^n, B)$ e $\mathrm{Span}(A^1, \dots, A^n)$ hanno la stessa dimensione, ma poiché si ha (**Proposizione** 2.11(2))
$$\mathrm{Span}(A^1, \dots, A^n) \subset \mathrm{Span}(A^1, \dots, A^n, B)\,,$$
i due sottospazi coincidono **e in** particolare $B \in \mathrm{Span}(A^1, A^2, \dots, A^n)$ (**Proposizione** 2.29**, in cui** $V = \mathrm{Span}(A^1, \dots, A^n, B)$ **e** $W = \mathrm{Span}(A^1, \dots, A^n)$).

$\square$

Fino a dicembre 2014

Riportiamo di seguito gli errata corrige aggiornati alla data del 31 dicembre 2014.

- Pagina 22:

Errata:

Definizione 0.27. Un *polinomio* $p(x)$ a coefficienti reali in x è un'espressione algebrica costituita da una somma finita di monomi che contengono solo potenze (con esponenente ≥ 0) di x, cioè
$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \quad a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, \dots, n\,.$$

Corrige:

Definizione 0.27. Un *polinomio* $p(x)$ a coefficienti reali in x è un'espressione algebrica costituita da una somma finita di monomi che contengono solo potenze (con esponenente **maggiore o uguale a** 0) di x, cioè

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \quad a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, \ldots, n\,.$$

- Pagina 26:

Errata:

(5) A questo punto, se il resto parziale sotto la riga a sinistra è di grado inferiore al dividendo il procedimento è terminato, ed il resto parziale è il *resto* della divisione; altrimenti, trattiamo questo polinomio come il nuovo dividendo, e ritorniamo al passo 2, seguendo gli altri passaggi in sequenza.

Corrige:

(5) A questo punto, se il resto parziale sotto la riga a sinistra è di grado inferiore al **divisore** il procedimento è terminato, ed il resto parziale è il *resto* della divisione; altrimenti, trattiamo questo polinomio come il nuovo dividendo, e ritorniamo al passo 2, seguendo gli altri passaggi in sequenza.

- Pagina 27:

Errata:

e poi, eseguendo il passo 3:

$$\begin{array}{rrrrr|rr}
9x^4 & -3x^3 & +0 & -2x & +1 & 3x^2 & -1 \\ \cline{6-7}
-9x^4 & & +3x^2 & & & 3x^2 & -x \\ \cline{1-5}
 & -3x^3 & +3x^2 & -2x & +1 & & \\
 & +3x^2 & & -x. & & &
\end{array}$$

infine, il passo 4:

$$\begin{array}{rrrrr|rr}
9x^4 & -3x^3 & +0 & -2x & +1 & 3x^2 & -1 \\ \cline{6-7}
-9x^4 & & +3x^2 & & & 3x^2 & -x \\ \cline{1-5}
 & -3x^3 & +3x^2 & -2x & +1 & & \\
 & +3x^2 & & -x & & & \\ \cline{2-5}
 & & +3x^2 & -3x & +1. & &
\end{array}$$

e così via.

Terminato il procedimento abbiamo:

- sotto il dividendo, a destra, separato da una riga, il quoziente $q(x)$;
- in fondo ai calcoli di sinistra, il resto $r(x)$ (eventualmente nullo):

$$
\begin{array}{rrrrr|lll}
9x^4 & -3x^3 & +0 & -2x & +1 & 3x^2 & -1 & \\ \cline{6-8}
-9x^4 & & +3x^2 & & & 3x^2 & -x & +1 \leftarrow q(x) \\ \cline{1-5}
 & -3x^3 & +3x^2 & -2x & +1 & & & \\
 & +3x^2 & & -x & & & & \\ \cline{2-5}
 & & +3x^2 & -3x & +1 & & & \\
 & & -3x^2 & & +1 & & & \\ \cline{3-5}
 & & r(x) \rightarrow & -3x & +2. & & &
\end{array}
$$

Corrige:

e poi, eseguendo il passo 3:

$$
\begin{array}{rrrrr|ll}
9x^4 & -3x^3 & +0 & -2x & +1 & 3x^2 & -1 \\ \cline{6-7}
-9x^4 & & +3x^2 & & & 3x^2 & -x \\ \cline{1-5}
 & -3x^3 & +3x^2 & -2x & +1 & & \\
 & \boldsymbol{+3x^3} & & -x. & & &
\end{array}
$$

infine, il passo 4:

$$
\begin{array}{rrrrr|ll}
9x^4 & -3x^3 & +0 & -2x & +1 & 3x^2 & -1 \\ \cline{6-7}
-9x^4 & & +3x^2 & & & 3x^2 & -x \\ \cline{1-5}
 & -3x^3 & +3x^2 & -2x & +1 & & \\
 & \boldsymbol{+3x^3} & & -x & & & \\ \cline{2-5}
 & & +3x^2 & -3x & +1. & &
\end{array}
$$

e così via.

Terminato il procedimento abbiamo:

- sotto il **divisore**, a destra, separato da una riga, il quoziente $q(x)$;
- in fondo ai calcoli di sinistra, il resto $r(x)$ (eventualmente nullo):

$$
\begin{array}{rrrrr|lll}
9x^4 & -3x^3 & +0 & -2x & +1 & 3x^2 & -1 & \\ \cline{6-8}
-9x^4 & & +3x^2 & & & 3x^2 & -x & +1 \leftarrow q(x) \\ \cline{1-5}
 & -3x^3 & +3x^2 & -2x & +1 & & & \\
 & \boldsymbol{+3x^3} & & -x & & & & \\ \cline{2-5}
 & & +3x^2 & -3x & +1 & & & \\
 & & -3x^2 & & +1 & & & \\ \cline{3-5}
 & & r(x) \rightarrow & -3x & +2. & & &
\end{array}
$$

- Pagina 47:

Errata:

DEFINIZIONE 1.1 Un *vettore applicato in O* è un segmento orientato $\boldsymbol{v}$ con primo estremo O, se P è il secondo estremo di $\boldsymbol{v}$ scriviamo $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{OP}$ (Figura 1.1).

Corrige:

DEFINIZIONE 1.1 Un *vettore applicato in O* è un segmento orientato $\boldsymbol{v}$ con primo estremo O**; se** P è il secondo estremo di $\boldsymbol{v}$ scriviamo $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{OP}$ (Figura 1.1).

- Pagina 52:

Errata:

Dalla Proprietà 1.3 si ha che se O, A, B sono punti distinti, essi sono allineati se e solo se $\mathrm{Span}(\overrightarrow{OB}) = \mathrm{Span}(\overrightarrow{OA})$, se e solo se $\overrightarrow{OB} \in \mathrm{Span}(\overrightarrow{OA})$. Traduciamo questa proprietà geometrica in una proprieà algebrica sui vettori applicati:

Corrige:

Dalla Proprietà 1.3 si ha che se O, A, B sono punti distinti, essi sono allineati se e solo se $\mathrm{Span}(\overrightarrow{OB}) = \mathrm{Span}(\overrightarrow{OA})$, se e solo se $\overrightarrow{OB} \in \mathrm{Span}(\overrightarrow{OA})$. Traduciamo questa proprietà geometrica in una **proprietà** algebrica sui vettori applicati:

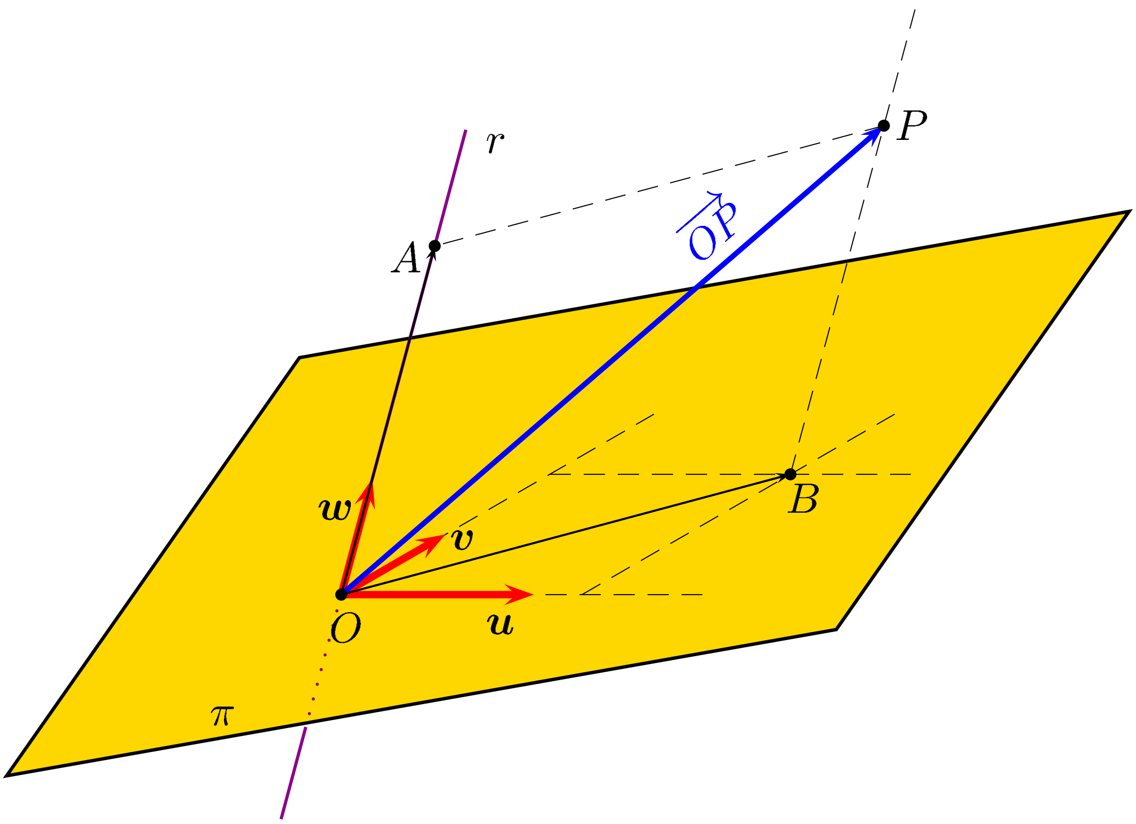
- Pagina 122:

Errata:

La figura poteva essere male interpretata, poiché si poteva avere l'impressione che la retta r giacesse nel piano π

Corrige:

Si riporta la figura modificata:



- Pagina 133, riga 2:

Errata:

quindiè

Corrige:

quindi è

- Pagina 141:

Errata:

Notiamo che l'enunciato della proposizione non vale per liste di vettori arbitrarie. Per esempio, se considero

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Corrige:

Notiamo che l'enunciato della proposizione non vale per liste di vettori arbitrarie. Per esempio, se **consideriamo**

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

- Pagina 162:

Errata:

PROPOSIZIONE 2.34. *Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n e U un sottospazio di V di dimensione k. Un sottospazio W di V è un complementare di U se e solo se $U \cap W = \left\{ \underset{\sim}{0} \right\}$ e $\dim W = n - k$.*

Infine, abbiamo un ulteriore problema: dato un sottospazio U di W, come facciamo a trovarne un complementare?

Fissiamo una base $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k\}$ di W. Con il metodo di completamento (Algoritmo 2.20) otteniamo una base $\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_{n-k}\}$ di V che contiene $\mathcal{B}$. Consideriamo la lista dei vettori che sono stati aggiunti a $\mathcal{B}$

$$\mathcal{B}'' = \{\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_{n-k}\} .$$

Poniamo $W = \operatorname{Span} \mathcal{B}''$.

Si osservi che $U + W = V$ infatti la lista $\mathcal{B} = \mathcal{B}'' = \mathcal{B}'$ è un sistema di generatori per V. Inoltre osserviamo che $\dim U = k$, $\dim W = n - k$ e $\dim(U + W) = n$ per cui U e W sono in somma diretta. Possiamo concludere che W è un complementare di U.

Corrige:

PROPOSIZIONE 2.34. *Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n e U un sottospazio di V di dimensione k. Un sottospazio W di V è un complementare di U se e solo se $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$ e $\dim W = n - k$.*

Infine, abbiamo un ulteriore problema: dato un sottospazio U di $\boldsymbol{V}$, come facciamo a trovarne un complementare?

Fissiamo una base $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k\}$ di $\boldsymbol{U}$. Con il metodo di completamento (Algoritmo 2.20) otteniamo una base $\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_{n-k}\}$ di V che contiene $\mathcal{B}$. Consideriamo la lista dei vettori che sono stati aggiunti a $\mathcal{B}$

$$\mathcal{B}'' = \{\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_{n-k}\} .$$

Poniamo $W = \operatorname{Span} \mathcal{B}''$.

Si osservi che $U + W = V$**:** **infatti** la lista $\boldsymbol{\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'' = \mathcal{B}'}$ è un sistema di generatori per V. Inoltre osserviamo che $\dim U = k$, $\dim W = n - k$ e $\dim(U + W) = n$ per cui U e W sono in somma diretta. Possiamo concludere che W è un complementare di U.

- Pagina 208:

Errata:

mentre matrice seguente D è una matrice diagonale:

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Corrige:

mentre la matrice seguente D è una matrice diagonale:

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

- Pagina 216:

Errata:

Poiché la prima colonna di AB è la somma di due vettori: $AC_1 + AC_2$, per la Proprietà 3.22 ($\mathcal{D}_3$) del determinante, risulta

$$\det(AC_1 + AC_2|AB^2|\dots|AB^n) = \det(AC_1|AB^2|\dots|AB^n) + (\boldsymbol{AC_2}|AB^2|\dots|AB^n),$$

Corrige:

Poiché la prima colonna di AB è la somma di due vettori: $AC_1 + AC_2$, per la Proprietà 3.22 ($\mathcal{D}_3$) del determinante, risulta

$$\det(\boldsymbol{AC_1} + \boldsymbol{AC_2}|AB^2|\dots|AB^n) = \det(\boldsymbol{AC_1}|AB^2|\dots|AB^n) + \mathbf{det}(\boldsymbol{AC_2}|AB^2|\dots|AB^n),$$

- Pagina 244:

Errata:

Osserviamo che i vettori $\boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_2$ sono linearmente dipendenti se e solo se i vettori colonna A^1 e A^2 sono linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^2$, se e solo se risulta $\det A = 0$.

Corrige:

Osserviamo che i vettori $\boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_2$ sono linearmente dipendenti se e solo se i vettori colonna A^1 e A^2 sono linearmente **dipendenti** in $\mathbb{R}^2$, se e solo se risulta $\det A = 0$.

- Pagina 295:

Errata:

lavorando fino ad avere r pivot sulle prime r righe, con l'accorgimento le operazioni di riduzione correttamente anche sull'ultima colonna.

Corrige:

lavorando fino ad avere r pivot sulle prime r righe, **con l'accorgimento di effettuare le operazioni** di riduzione correttamente anche sull'ultima colonna.

- Pagina 307:

Errata:

tuttavia L non è lineare. In effetti, in questo caso si verifica immediatamente che entrambe le proprietà di linearitá sono violate. Per esempio:

Corrige:

tuttavia L non è lineare. In effetti, in questo caso si verifica immediatamente che entrambe le proprietà di **linearità** sono violate. Per esempio:

- Pagina 329:

Errata:

Corollario 5.19. *Sia $L\colon V \to W$ un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali reali di dimensione finita. Siano $\mathcal{B}_V = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ e $\mathcal{B}_W = \{\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_m\}$ rispettivamente una base di V e una base di W, e $A = [[L]]_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W} \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(k, n)$ la matrice associata a L nelle basi fissate. Risulta allora:*

Corrige:

Corollario 5.19. *Sia $L\colon V \to W$ un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali reali di dimensione finita. Siano $\mathcal{B}_V = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ e $\boldsymbol{\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_k\}}$ rispettivamente una base di V e una base di W, e $A = [[L]]_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W} \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(k, n)$ la matrice associata a L nelle basi fissate. Risulta allora:*

- Pagina 329:

Errata:

Quindi, per dimostrare il Corollario 5.19(1) abbiamo:

$$\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} L \iff L(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_V \iff Y = \mathbf{0}_k \iff A \cdot X = \mathbf{0}_k \iff X \in \operatorname{Ker} A\,.$$

Corrige:

Quindi, per dimostrare il Corollario 5.19(1) abbiamo:

$$\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} L \iff \boldsymbol{L(v) = 0_W} \iff Y = \mathbf{0}_k \iff A \cdot X = \mathbf{0}_k \iff X \in \operatorname{Ker} A\,.$$

- Pagina 336:

Errata:

Definizione 5.10. Matrici reali!similitudine Siano $A, B \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(n)$ due matrice quadrate reali di ordine $n \times n$, le matrici sono dette *simili* se esiste una matrice invertibile $N \in \mathsf{GL}(n, \mathbb{R})$ tale che

Corrige:

Definizione 5.10. Siano $A, B \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(n)$ due matrice quadrate reali di ordine $n \times n$, le matrici sono dette *simili* se esiste una matrice invertibile $N \in \mathsf{GL}(n, \mathbb{R})$ tale che

Nell'indice analitico, inserire la voce "Matrici reali - similitudine 336"

- Pagina 366:

Errata:

I due polinomi caratteristici di A e B si ricavano immediatamente osservando che sono entrambi matrici diagonali, e, quindi, triangolari

$$p_A(t) = -t(2-t)(4-t)\,, \qquad \textit{texte} \qquad p_B(t) = -t(3-t)^2\,.$$

Corrige:

I due polinomi caratteristici di A e B si ricavano immediatamente osservando che sono entrambi matrici diagonali, e, quindi, triangolari

$$p_A(t) = -t(2-t)(4-t)\,, \qquad \textbf{e} \qquad p_B(t) = -t(3-t)^2\,.$$