

Università di Pavia  
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA  
Laurea specialistica in Matematica - A.A. 2016/2017  
Corso: Fenomeni di diffusione e trasporto.

**Docenti: F. BISI, F. SALVARANI.**

Modulo 2: Fenomeni di diffusione con  
introduzione alla meccanica dei continui -Docente: F. BISI.

## 1 Regole generali per l'esame

L'esame è costituito da una prova scritta obbligatoria e da una prova orale facoltativa, a richiesta dello studente. I docenti si riservano comunque la possibilità di integrare l'esame scritto con una prova orale.

Le regole per l'esame, con esempi di prove somministrate, sono pubblicate nel sito del docente Prof. F. Salvarani, e sono consultabili direttamente seguendo il link riportato:

<http://www-dimat.unipv.it/salvarani/fdt.xhtml>.

L'eventuale prova orale *di norma* viene sostenuta in corrispondenza della consegna delle valutazioni della prova scritta, il giorno della prova scritta stessa o nei giorni successivi, secondo un calendario che verrà comunicato agli Studenti dalla Commissione giudicatrice.

Se, a seguito di una qualunque delle prove (scritta, o orale successiva), lo studente viene riprovato, o decide di rifiutare il voto, è necessario ripetere l'esame per ricevere una nuova valutazione. **Il ritiro, durante una qualunque delle prove d'esame, equivale al non superamento dell'esame stesso.**

Durante le prove d'esame, non è consentito l'uso né di libri, né di appunti, né di calcolatrici tascabili, né di telefoni cellulari o qualunque altro dispositivo elettronico che consenta il calcolo o la connessione alla rete internet; è altresì rigorosamente vietato comunicare con altre persone (esclusi i membri della commissione) con qualsiasi mezzo diretto (vocale, gestuale, scritto, ecc.) o indiretto (cellulare, SMS, email ecc.).

La violazione delle norme relative al paragrafo precedente comporta l'esclusione INAPPELLABILE dalla prova. L'iscrizione alle prove scritte on-line è OBBLIGATORIA. Ulteriori informazioni ed integrazioni alle presenti norme nel sito del docente:

<http://matematica.unipv.it/it/people/2042>.

## 2 Materiale didattico

Il corso viene diviso in due moduli, in collaborazione con il Prof. Francesco Salvarani, del Dipartimento di Matematica dell'Università di Pavia. Di seguito vengono riportate le informazioni riguardanti il programma del modulo le cui lezioni sono tenute dal docente Prof. F. Bisi (Fenomeni di diffusione con introduzione alla meccanica dei continui).

Presso i siti segnalati sopra viene messo a disposizione materiale vario su tutti gli argomenti svolti nel corso; seguire anche il link al sito diretto:

<http://smmm.unipv.it/difftrasp.html>.

In aggiunta, gli studenti sono invitati a consultare i libri di testo suggeriti:

- [G] M. E. Gurtin “An Introduction to Continuum Mechanics”, Academic Press (NY), 1981.
- [S] S. Salsa “Partial Differential Equations in Action - From Modelling to Theory”, Springer (Berlin/Heidelberg/Milan), 2009.
- [E] L. C. Evans “Partial Differential Equations”, American Mathematical Society, Providence (RI), 1998.
- [V] J. L. Vazquez “The porous medium equation : mathematical theory” (XXII - Oxford mathematical monographs) Clarendon Press (Oxford), 2007.

## 3 Programma del corso

In grassetto sono indicati i teoremi per i quali è richiesta la dimostrazione; le altre dimostrazioni potranno essere richieste, assieme ad altro, per valutare il livello di preparazione. Vengono riportati riferimenti *indicativi* della collocazione degli argomenti elencati nelle dispense.

### 3.1 Algebra e calcolo tensoriali

#### **Algebra tensoriale**

Spazio euclideo  $\mathcal{E}$ ; punti, vettori, tensori; spazio vettoriale  $\mathcal{V}$  delle differenze fra punti di  $\mathcal{E}$ . Terna cartesiana (base ortonormale); prodotto diadico; base canonica di diadi per lo spazio vettoriale dei tensori (spazio  $\mathcal{L}(\mathcal{V}) = \text{Lin}$ ).

Operatori di proiezione. Prodotto scalare fra vettori e tensore trasposto; prodotto scalare fra tensori; norma di un tensore. Prodotto vettoriale. Delta di Kronecker  $\delta_{ij}$  e tensore (alternatore) di Ricci  $\varepsilon_{ijk}$ . Tensori simmetrici (**Sym**); tensori antisimmetrici (**Skw**); **vettore assiale associato ad un tensore antisimmetrico  $\mathbf{W}$** . Forme bilineari, prodotto misto e determinante di un tensore; invarianti tensoriali di primo, secondo e terzo ordine. Invertibilità di un tensore; tensori con determinante positivo  $\text{Lin}^+$ . Tensori ortogonali  $O(3) = O(\mathcal{V}) = \text{Orth}$ ; rotazioni  $SO(3) = SO(\mathcal{V}) = \text{Orth}^+$ . Autovalori e autovettori di un tensore. Tensori definiti positivi; tensori simmetrici definiti positivi **PSym**. Teorema spettrale; decomposizione spettrale. **Lemma del tensore radice  $\mathbf{U}^2 = \mathbf{C} \in \text{PSym}$** . **Teorema di decomposizione polare**.

### Calcolo tensoriale

Differenziabilità di un'applicazione lineare, derivata rispetto a uno scalare. Teorema della regolarità dell'applicazione lineare inversa. **Esempi** (derivata del modulo quadro di un vettore, di un'applicazione lineare, del quadrato di un tensore, del determinante, della radice). Derivata di un prodotto. derivata di una funzione composta. Gradiente di uno scalare o di un vettore. Divergenza di un vettore o di un tensore. **Formule notevoli per calcolo di gradienti e divergenze**. Rotore di un vettore. Curve normalizzate. Integrale di linea; circuitazione. Teoremi della divergenza per campi scalari, vettoriali o tensoriali; teorema di localizzazione; teorema di Stokes.

Riferimenti: [G]: Capitolo 1 e 2.

## 3.2 Cinematica dei corpi continui

Modello dei continui. **Deformazione, gradiente di deformazione; decomposizioni**. Deformazioni rigide, traslazioni, rotazioni; piccole deformazioni, **spostamenti rigidi infinitesimi**. Moti; descrizione materiale e descrizione spaziale (punti di vista lagrangiano ed euleriano). Traiettoria, mappa di riferimento. **Derivate temporali materiali e spaziali. Gradiente di velocità. Lemmi di calcolo. Teoremi del trasporto della vorticità (spin)**. Moto stazionario. Streamline e pathline. Moti rigidi, moti isocori. **Moti piani. Esempi. Teoremi del trasporto (teorema del volume, di Reynolds). Conservazione della massa, equazioni di continuità. Lemma di derivazione**. Quantità di moto e momento angolare.

Riferimenti: [G]: Capitoli 3 e 4. ([B]: Capitoli 1 e 2).

### 3.3 Forze, energia e equazioni di bilancio

Forze di volume e forze di superficie. **Bilancio delle forze e dei momenti; principio dei lavori virtuali.** Tensore degli sforzi  $\mathbf{T}$  e **Teorema di Cauchy.** Esempi di stati di sforzo. **Bilancio dei momenti in una regione di riferimento. Bilancio dell'energia (teorema della potenza).**

**Formulazione nei continui del primo principio della termodinamica. Equazione del calore** sotto le ipotesi di rigidità/velocità nulle e la validità della legge di Fourier per il flusso di calore.

Riferimenti: [G]: Capitolo 5. ([B]: Capitoli 2 e 3).

### 3.4 Assunzioni costitutive

Corpo materiale, classi costitutive. Processi dinamici e flussi. Fluidi Euleriani. Fluidi ideali; proprietà di conservazione. **Teorema di Bernoulli nel caso generale e per fluidi ideali. Conservazione della circolazione, dell'irrotazionalità e trasporto delle linee di vortice nei fluidi ideali.** Fluidi newtoniani (incompressibili). **Equazioni di Navier-Stokes.** Normalizzazione e adimensionalizzazione; **numero di Reynolds.** Esempi: **diffusione della vorticità, flusso piano. Bilancio dell'energia in un fluido viscoso.** La soluzione di un problema di flusso viscoso: **lemma di annullamento; teorema di unicità; teorema di stabilità.** Cenni su fluidi comprimibili e fluidi newtoniani generalizzati.

Riferimenti: [G]: Capitoli 6 e 8. ([B]: Capitoli 4 e 5).

### 3.5 Equazione del calore; equazione dei mezzi porosi

L'equazione del calore come paradigma della diffusione. Adimensionalizzazione nel caso unidimensionale standard. Condizioni al bordo di Dirichlet, di Neumann, di Robin, miste. Soluzione del caso unidimensionale mediante separazione delle variabili. **Unicità della soluzione con il metodo dell'energia. Principio del massimo (minimo) debole e forte; corollari. Riscaldamento parabolico. Soluzione fondamentale.** Uso della soluzione fondamentale **per il problema di Cauchy omogeneo** e per il problema non omogeneo. Legge di Darcy. Considerazioni sui mezzi porosi. Equazione dei mezzi porosi (EMP) standard. Propagazione a velocità finita: soluzioni di tipo onde, **soluzione fondamentale di Barenblatt;** soluzioni stazionarie e a variabili separabili.

Riferimenti: [E]: Capitolo 2. [S]: Capitoli 1 e 2. [V]: Capitoli 3,4, e dispense fornite sul sito.