# FACOLTÀ DI INGEGNERIA
# Esame di GEOMETRIA E ALGEBRA.
(Ingegneria Elettronica e Informatica)
**A.A. 2018/2019. Docente: F. BISI.**

## 1 Regole generali per l'esame

**L'esame è costituito da una prova scritta e da una eventuale prova orale**, in accordo con le regole pubblicate nel sito del docente, e sono consultabili direttamente seguendo il link riportato:

`http://matematica.unipv.it/attach/FBFA5D9FEBE21FDF/file/regolesame1718.pdf`.

L'eventuale prova orale *di norma* viene sostenuta nei giorni successivi al giorno della prova scritta, secondo un calendario che verrà comunicato agli Studenti dalla Commissione giudicatrice. **A discrezione della commissione**, agli studenti che hanno titolo a conseguire una valutazione di almeno 27/30 nel primo appello della sessione invernale potrà essere concesso di sostenere la prova orale in concomitanza con il secondo appello della sessione invernale, conservando la valutazione della prova scritta.

Se, anche a seguito della eventuale prova orale, lo studente viene riprovato, o decide di rifiutare il voto, è necessario ripetere ***entrambe*** le prove (scritta e eventuale orale) per ricevere una nuova valutazione. **Il ritiro, durante una qualunque delle prove d'esame, equivale al non superamento dell'esame stesso.**

Durante le prove d'esame, non è consentito l'uso né di libri, né di appunti, né di calcolatrici tascabili, né di telefoni cellulari o qualunque altro dispositivo elettronico che consenta il calcolo o la connessione alla rete internet; è altresì rigorosamente vietato comunicare con altre persone (esclusi i membri della commissione) con qualsiasi mezzo diretto (vocale, gestuale, scritto, ecc.) o indiretto (cellulare, SMS, email ecc.).

La violazione delle norme relative al paragrafo precedente comporta l'esclusione INAPPELLABILE dalla prova. L'iscrizione alle prove scritte online sul sito di Facoltà è OBBLIGATORIA. Ulteriori informazioni ed integrazioni alle presenti norme nel sito del docente:

`http://matematica.unipv.it/it/people/2042`.

## 2 Materiale didattico

Il corso viene modellato seguendo il testo pubblicato in collaborazione con gli altri docenti dei corsi paralleli presso la sede di Pavia:

Fulvio Bisi, Francesco Bonsante, Sonia Brivio:
Lezioni di Algebra Lineare con Applicazioni alla Geometria Analitica.
Edizioni La Dotta - Casalecchio di Reno (BO)

Per aiutare nella ricerca degli argomenti del programma svolti ed elencati di seguito, vengono indicate le sezioni del testo adottato (richiamato con la sigla [BBB]) in cui trovare la corrispondente trattazione.

Oltre al sito segnalato sopra, viene messo a disposizione materiale vario su tutti gli argomenti svolti nel corso negli anni passati (link al sito diretto). In particolare, nel sito di Dipartimento si trova una nuova raccolta di esercizi e vecchie prove d'esame, alcune con risposte corrette e/o risoluzione dei problemi.

In aggiunta al testo consigliato e al materiale online, gli studenti possono consultare altri testi di algebra lineare e geometria analitica; fra i libri di testo integrativi suggeriti vi sono i seguenti:

- [A-dF] M. Abate, C. de Fabritiis,"Geometria analitica con elementi di algebra lineare", Ed. McGraw-Hill Italia, Milano.
- [A] M. Abate "Algebra lineare", Ed. McGraw-Hill Italia, Milano.
- [G-Z] M. Grieco, B. Zucchetti, "Algebra lineare e geometria analitica", Ed. La Goliardica Pavese, Pavia.
- [B-G] A. Bernardi, A. Gimigliano "Algebra lineare e geometria analitica" ($2^a$ ed.), CittàStudi Edizione (DeA), Novara.

## 3 Programma del corso

In grassetto sono indicati i teoremi per i quali è richiesta la dimostrazione; le altre dimostrazioni potranno essere richieste, assieme ad altro, per valutare il livello di preparazione. Vengono riportati riferimenti *indicativi* della collocazione degli argomenti elencati nelle dispense. Vengono anche indicati esplicitamente alcuni prerequisiti, che –anche se non trattati direttamente o estesamente nel corso– sono necessari alla comprensione dei suoi contenuti.

## 3.1 (Prerequisiti e complementi)

Nozioni di base di teoria degli insiemi (appartenenza, inclusione, unione, intersezione, prodotto cartesiano); relazioni di equivalenza, classi di equivalenza. Insiemi numerici: naturali, interi, reali, complessi. Principio di induzione; esempio di suo utilizzo. Logica matematica elementare; implicazione; condizioni necessarie e sufficienti. Funzione; immagine e controimmagine; funzioni iniettive, suriettive, bijettive; funzione inversa; composizione di funzioni. Strutture algebriche: gruppi, gruppi abeliani, anelli, campi. Anello dei polinomi a coefficienti reali e complessi. **Teorema di Ruffini**, regola di Ruffini; *molteplicità algebrica* di una radice di polinomio. Il teorema fondamentale dell'Algebra (solo enunciato); lemma della radice complessa coniugata per polinomi a coefficienti reali, teorema di decomposizione di un polinomio reale in fattori lineari o quadratici, corollario dell'esistenza di una radice reale per polinomi reali di grado dispari. Fattorizzazione di polinomi in campo reale e in campo complesso.

Riferimenti: [BBB]: Capitolo 0 (Sezioni $0.1 - 0.4$, $0.6$).

## 3.2 Vettori applicati e geometria dello spazio

Lo spazio vettoriale $\mathbb{E}^3_O$ dei vettori applicati in un punto $O$; somma e differenza di vettori; struttura di gruppo abeliano. Moltiplicazione di un vettore per uno scalare; **proprietà fondamentali e derivate**. Traslazione di un vettore; operatore di traslazione; vettori differenza. Sistemi di riferimento cartesiani, coordinate cartesiane di un punto, traslazione di sistemi di riferimento. Vettori linearmente indipendenti; *span* di uno o due vettori. Equazioni parametriche di rette e piani: direzione di una retta, giacitura di un piano; retta per due punti distinti, piano per tre punti non allineati. Definizione di prodotto scalare in $\mathbb{E}^3_O$ e **relative proprietà. Significato geometrico e proiezioni ortogonali**. **Espressione del prodotto scalare in componenti**. Applicazione: calcolo della distanza di due punti. Equazione cartesiana del piano, vettore normale al piano, parallelismo tra piani. Equazioni cartesiane della retta, parallelismo tra rette, parallelismo retta-piano, perpendicolarità retta-piano. Cenni su fascio proprio di piani e fascio improprio di piani. Posizione reciproca di due piani, di un piano e una retta, di due rette: rette complanari e rette sghembe. **Calcolo della distanza punto-piano e punto-retta**.

Riferimenti: [BBB]: Capitolo 1 (Sezioni $1.1 - 1.8$).

## 3.3 Spazi vettoriali

Definizione di spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$: $n-$uple ordinate come vettori. Addizione di vettori e moltiplicazione per uno scalare; vettore nullo; **proprietà**. Spazi vettoriali astratti; **proprietà (regola di cancellazione, legge di annullamento ecc.)**; esempi (spazio vettoriale $\mathbb{E}^3_O$ dei vettori applicati in $O$, spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi nell'indeterminata $x$, spazio vettoriale delle funzioni contnue su un intervallo, ...). Sottospazi vettoriali: definizione di sottospazio; operazioni con i sottospazi: intersezione di due sottospazi (**è un sottospazio vettoriale**); unione di due sottospazi (**non è un sottospazio**). Somma di sottospazi vettoriali; **la somma di sottospazi è un sottospazio vettoriale**. Sottospazio generato da $n$ vettori $\mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \dots \boldsymbol{v}_n)$; **lo** Span **di un numero finito di vettori è un sottospazio vettoriale**. **Proprietà degli** Span **di liste di vettori**. Sistema di generatori; spazi vettoriali finitamente generati. Definizione di dipendenza ed indipendenza lineare. **Proprietà delle liste di vettori linearmente indipendenti**. Base di uno spazio finitamente generato. **Proprietà fondamentale della base (unicità della combinazione lineare)**. Basi canoniche di spazi $\mathbb{R}^n$. **Proprietà delle basi**. Coordinate (o componenti) di un vettore rispetto ad una base. Teorema di esistenza di una base in uno spazio vettoriale finitamente generato. (Algoritmo di completamento e di estrazione di una base). **Proprietà delle basi; lemma fondamentale di sostituzione; due basi di uno spazio vettoriale hanno lo stesso numero di elementi**. Dimensione di uno spazio vettoriale. Dimensione di sottospazi vettoriali; **lemma fondamentale e proprietà**. Ricerca di una base per lo spazio somma e intersezione di due sottospazi vettooriali. Somma diretta di due sottospazi vettoriali; teorema di Grassmann; complementare di un sottospazio in uno spazio vettoriale. Somma diretta di un numero qualunque $k$ sottospazi vettoriali.

Riferimenti: [BBB]: Capitolo 2 (Sezioni $2.1 - 2.9$).

## 3.4 Matrici

Matrici a entrate reali, vettori riga, vettori colonna di una matrice; matrice nulla. **Operazioni di addizione fra matrici, e di moltiplicazione per uno scalare; proprietà**. Prodotto fra matrice e vettore compatibili; **definizione e proprietà**; prodotto fra matrici compatibili; interpretazioni alternative del prodotto fra matrici ("righe per colonne"); **definizione e proprietà**. **Proprietà del prodotto di matrici nell'anello** $\mathsf{M}_{\mathbb{R}}(n)$. Matrice identità; matrice inversa, invertibilità. **Invertibilità di una matrice quadrata e soluzione del sistema omogeneo associato**. **Indipendenza**

**lineare delle colonne di una matrice e soluzione del sistema omogeneo associato. Se le colonne di una matrice quadrata reale di ordine $n$ sono una base di $\mathbb{R}^n$, la matrice è invertibile; determinazione della matrice inversa. Proprietà delle matrici invertibili.** Gruppo lineare $\mathsf{GL}(n, \mathbb{R})$ delle matrici reali invertibili di ordine $n$. **Cambio di base e matrice relativa.** Matrici triangolari e diagonali; **calcolo del determinante relativo.** Trasposta di una matrice e **relative proprietà.** Matrici simmetriche ed antisimmetriche (o emisimmetriche). Definizione di determinante di una matrice quadrata. Teorema per lo sviluppo lungo la prima riga e per il determinante della matrice trasposta. Teorema di Laplace (calcolo del determinante con la regola di Laplace). **Proprietà elementari del determinante.** Teorema di Binet. **Legame fra invertibilità e non singolarità di una matrice.** Teorema di Cramer per il calcolo della matrice inversa. Definizione di rango di una matrice; **proprietà del rango di una matrice.** Il rango di $A$ coincide il massimo ordine dei minori non nulli estraibili da $A$. Il rango di una matrice e della sua trasposta coincidono. Teorema di Kronecker (degli orlati). Rango di matrici dipendenti da uno o più parametri.

Riferimenti: [BBB]: Capitolo 3 (Sezioni $3.1 - 3.7$).

## 3.5 Sistemi lineari

Sistema lineare di $m$ equazioni in $n$ incognite a coefficienti reali: definizione di matrice associata $A$, scrittura matriciale, soluzioni del sistema e compatibilità (o risolvibilità). **Teorema di Rouché-Capelli.** Sistemi quadrati non singolari; **regola di Cramer per la soluzione di un sistema quadrato non singolare.** Sistemi equivalenti. Sistemi lineari omogenei: **primo teorema di struttura**; descrizione del sottospazio vettoriale delle soluzioni (base di $\operatorname{Ker} A$); teorema delle dimensioni per il nucleo di una matrice. Sistemi lineari non omogenei: varietà lineare (sottospazio affine/traslato di un sottospazio); **secondo teorema di struttura.** Metodo di risoluzione dei sistemi lineari. Sistemi triangolari non singolari. L'algoritmo di eliminazione di Gauss: sistemi quadrati; sistemi a scala e riduzione a scala; applicazioni del metodo di riduzione a scala. Determinazione del rango di una matrice mediante riduzione a scala. Discussione di sistemi lineari parametrici. Equazioni cartesiane di un sottospazio vettoriale.

Riferimenti: [BBB]: Capitolo 4 (Sezioni $4.1 - 4.8$).

## 3.6 Applicazioni lineari

Funzioni lineari. Applicazione associata ad una matrice **e sue proprietà**. Definizione di applicazione lineare tra due spazi vettoriali di vettori colonna $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, e fra due spazi vettoriali qualunque $L\colon V \to W$ (sia finitamente che non finitamente generati). **L'immagine di un sottospazio secondo un'applicazione lineare è un sottospazio**. Definizione di nucleo e immagine di una applicazione lineare $f\colon U \to V$ tra due spazi vettoriali: $\mathrm{Ker}(f)$ **e** $\mathrm{Im}(f)$ **sono sottospazi**. **Teorema delle dimensioni**. **Le immagini secondo un'applicazione lineare dei vettori di una base del dominio sono un sistema di generatori per l'immagine dell'applicazione. Le immagini di una lista di vettori linearmente dipendenti secondo un'applicazione lineare sono ancora linearmente dipendenti**. **Teoremi sull'iniettività e la suriettività di un'applicazione lineare**. Isomorfismi; isomorfismo cone relazione di equivalenza; due spazi isomorfi sono di uguale dimensione: condizione necessaria per un isomorfismo; **isomorfismo di rappresentazione su una base**. **Proprietà delle rappresentazioni di un vettore su una base**. **Proprietà degli isomorfismi su una base**. Due spazi vettorali di uguale dimensione sono isomorfi: condizione sufficiente per un isomorfismo. **Teorema fondamentale di rappresentazione e definizione di matrice rappresentativa di un'applicazione lineare $L$ rispetto alle basi fissate nel dominio e nel codominio**. Esempi. **Legame fra nucleo/immagine di un'applicazione lineare fra spazi vettoriali qualunque e nucleo/immagine/rango della matrice di rappresentazione**. Traccia di una matrice quadrata **e sue proprietà**. Matrici rappresentative di una stessa applicazione lineare in basi differenti; similitudine fra matrici quadrate; **invarianti matriciali per similitudine**. **L'uguaglianza fra gli invarianti è solo necessaria per la similitudine fra matrici**.

Riferimenti: [BBB]: Capitolo 5 (Sezioni $5.1 - 5.5$).

## 3.7 Autovalori e diagonalizzazione

Esempi geometrici. Definizione di autovalore ed autovettore di un operatore lineare; spettro. Definizione di autospazio associato ad un autovalore; **ogni autospazio è un sottospazio vettoriale; autospazi associati a due autovalori distinti sono in somma diretta**. Autovalori, autovettori e spettro di una matrice quadrata. **Ricerca degli autovalori di una matrice quadrata:** $\det(A - tI) = 0$. Definizione di polinomio caratteristico di una matrice A, equazione caratteristica e spettro. **Proprietà del polinomio caratteristico (con alcune dimostrazioni o esempi in due**

**dimensioni)**. Molteplicità algebrica di un autovalore. Autovalori di una matrice diagonale e di una matrice triangolare; matrici a blocchi. Dimensione dell'autospazio associato ad un autovalore; molteplicità geometrica di un autovalore. Limitazioni per la molteplicità geometrica; autovalori regolari.

**Equivalenza fra l'esistenza di una base di $\mathbb{R}^n$ composta da autovettori di una matrice quadrata $A$ e similitudine di $A$ con una matrice diagonale**. Diagonalizzabilità di una matrice. **Equivalenza fra l'esistenza di una base di $V$ composta da autovettori di un operatore lineare $L$ agente su $V$ e la diagonalità della matrice di rappresentazione di $L$ su tale base**. Diagonalizzabilità di un operatore lineare. **Autospazi e somma diretta**. **Primo e secondo criterio fondamentale per la diagonalizzabilità**. **Condizione necessaria per la diagonalizzabilità di una matrice**. Determinante e traccia di una matrice con tutti gli autovalori in $\mathbb{R}$.

Riferimenti: [BBB]: Capitolo 6 (Sezioni 6.1 – 6.5).

## 3.8 Struttura metrica negli spazi vettoriali

Prodotto scalare canonico in $\mathbb{R}^n$; **proprietà**; norma e metrica indotta dal prodotto scalare (distanza). **Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, disuguaglianza triangolare**. Angolo formato da due vettori; vettori ortogonali e versori. Sistemi ortogonali e ortonormali di vettori **proprietà (coefficienti di Fourier, decomposizione di un vettore)**. Definizione di base ortonormale; **proprietà**. Proiezione ortogonale. Teorema di Gram-Schmidt per l'algoritmo di ortogonalizzazione. **Sottospazio ortogonale a un insieme di vettori; proprietà; complemento ortogonale $\mathcal{V}^\perp$ di un sottospazio $\mathcal{V}$ in $\mathbb{R}^n$ e proprietà relative**. **Equazioni cartesiane di un sottospazio e basi del complemento ortogonale**. Definizione di matrice ortogonale in $\mathsf{GL}(n, \mathbb{R})$. **Condizioni sulle righe e sulle colonne di una matrice ortogonale**. **Condizioni equivalenti per caratterizzare una matrice ortogonale: conservazione del prodotto scalare, cambio di base fra basi ortonormali**. Distanza e metrica; le matrici ortogonali conservano la metrica. Il gruppo ortogonale $\mathcal{O}(n)$; il gruppo ortogonale speciale $\mathcal{SO}(n)$. Le matrici ortogonali di ordine due. **Lemma della matrice trasposta nel prodotto scalare; ortogonalità degli autovettori associati ad autovalori distinti per matrici simmetriche.** Teorema spettrale per le matrici reali simmetriche.

Riferimenti: [BBB]: Capitolo 7 (Sezioni 7.1 – 7.7).

## 3.9 Forme quadratiche e loro applicazioni

Definizione di forma quadratica reale su $\mathbb{R}^n$ e relazione con le matrici reali simmetriche; rappresentazione matriciale. Forme quadratiche definite positive (negative), semidefinite positive (negative), non definite. Riduzione di una forma quadratica reale a forma canonica. Segno di una forma quadratica. Condizione necessaria e sufficiente affinché una forma quadratica sia definita positiva (negativa) o semidefinita positiva (negativa); analisi del caso di matrici quadrate di ordine 2.

Riferimenti: [BBB]: Capitolo 8 (Sezione 8.1).