Domanda [orthbasisA] Sia $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \right\}$ una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$; sia $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$. Le coordinate $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}}$ di $\boldsymbol{u}$ sulla base $\mathcal{B}$ sono:

☐ $\begin{pmatrix}9\\-1\\0\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}3/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}6\\2\\-1\end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix}3/2\\-1/2\\0\end{pmatrix}$

Domanda [orthbasisB] Sia $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$ una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$; sia $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$. Le coordinate $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}}$ di $\boldsymbol{u}$ sulla base $\mathcal{B}$ sono:

☐ $\begin{pmatrix}5\\2\\0\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}5/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}3\\5\\-2\end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix}5/3\\1/3\\0\end{pmatrix}$

Domanda [orthbasisC] Sia $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \right\}$ una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$; sia $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$. Le coordinate $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}}$ di $\boldsymbol{u}$ sulla base $\mathcal{B}$ sono:

☐ $\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}4/\sqrt{2}\\0\\3/\sqrt{3}\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$

Domanda [orthbasisD] Sia $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$ una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$; sia $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$. Le coordinate $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}}$ di $\boldsymbol{u}$ sulla base $\mathcal{B}$ sono:

☐ $\begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}3/\sqrt{6}\\0\\5/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}6\\-4\\4\end{pmatrix}$ ■ $\begin{pmatrix}1/2\\0\\5/2\end{pmatrix}$

Domanda [prodottoscalA] ♣ Siano $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ vettori di $\mathbb{E}^3_O$. Quali delle seguenti affermazioni sono *sempre* vere?

☐ Se $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle < \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}\rangle$, allora $\|\boldsymbol{v}\| < \|\boldsymbol{w}\|$.

■ $\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2 - 2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$.

☐ $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle \leq \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}\rangle$.

■ $\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\| \geq \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}\|$

Domanda [prodottoscalB] ♣ Siano $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ vettori di $\mathbb{E}^3_O$. Quali delle seguenti affermazioni sono *sempre* vere?

☐ Se $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}\rangle$, allora $\|\boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{w}\|$.

☐ $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\| + 2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$.

☐ $\frac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle}{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle} = \frac{\|\boldsymbol{u}\|}{\|\boldsymbol{w}\|}$.

■ $\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$

Domanda [prodottoscalC] ♣ Siano $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ vettori di $\mathbb{E}^3_O$. Quali delle seguenti affermazioni sono *sempre* vere?

☐ Se $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle < \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}\rangle$, allora $\|\boldsymbol{v}\| < \|\boldsymbol{w}\|$.

■ $\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2 - 2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$.

☐ $\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\| \leq \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}\|$

■ $|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}\rangle| \leq \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{w}\|$

Domanda [prodottoscalD] ♣ Siano $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ vettori di $\mathbb{E}^3_O$. Quali delle seguenti affermazioni sono *sempre* vere?

- [ ] Se $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle > 0$ e $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}\rangle > 0$, allora $\boldsymbol{u} \in \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$.
- [x] $\|\boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + 4\|\boldsymbol{v}\|^2 - 4\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$.
- [x] $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle \leq \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|$.
- [x] $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{w}\|$

Domanda [UorthbasisA] ♣ Sia $U = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid x + y + z = y - 2t = 0\}$. Quali fra le seguenti sono basi **ortogonali** di U?

- [x] $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$.
- [ ] $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}$.
- [ ] $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\}$.
- [ ] $\{\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\}$.

Domanda [UorthbasisB] ♣ Sia $U = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix})$. Quali fra le seguenti sono basi di $U^\perp$?

- [ ] $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$.
- [ ] $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}$.
- [x] $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\}$.
- [x] $\{\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\}$.

Domanda [UorthbasisC] ♣ Sia $U = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid x + 2y = y - z - t = 0\}$. Quali fra le seguenti sono basi **ortogonali** di U?

- [x] $\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$.
- [ ] $\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.
- [x] $\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.
- [ ] $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$.

Domanda [UorthbasisD] ♣ Sia $U = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix})$. Quali fra le seguenti sono basi di $U^\perp$?

- [ ] $\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$.
- [x] $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.
- [x] $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}\}$.
- [x] $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$.

Domanda [fqA] Si determini quale fra le seguenti funzioni è una forma quadratica definita positiva.

- [x] $q(x, y) = x^2 + y^2 - xy$;
- [ ] $q(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy$;
- [ ] $q(x, y) = x^2 - y^2 + 2xy$;
- [ ] $q(x, y) = x^2 + 2y$.

Domanda [fqB] Si determini quale fra le seguenti funzioni è una forma quadratica indefinita.

- [x] $q(x, y) = x^2 - 2y^2 - 2xy$;
- [ ] $q(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy$;
- [ ] $q(x, y) = -x^2 - 2y^2 + xy$;
- [ ] $q(x, y) = 3x - y^2$.

Domanda [`fqC`] Si determini quale fra le seguenti funzioni è una forma quadratica definita negativa.

- [x] $q(x,y) = -2x^2 - y^2 + 2xy$;
- [ ] $q(x,y) = -x^2 - 2y^2 - 4xy$;
- [ ] $q(x,y) = x^2 + y^2 + xy$;
- [ ] $q(x,y) = -x^2 - y$.

Domanda [`fqD`] Si determini quale fra le seguenti funzioni è una forma quadratica semi definita positiva.

- [x] $q(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy$;
- [ ] $q(x,y) = x^2 + y^2 - xy$;
- [ ] $q(x,y) = x^2 - y^2 + xy$;
- [ ] $q(x,y) = y$.

Domanda [`simmA`] ♣ Sia A una matrice **simmetrica** 3×3. Indicare quali delle seguenti affermazioni sono sicuramente false, cioè sono in contraddizione con l'assunto su A:

- [x] Gli unici autovalori di A sono 1 e 3 entrambi con molteplicità geometrica 1.
- [x] $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ è autovettore con autovalore 1 mentre $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ è autovettore con autovalore 2.
- [ ] $\det A = 0$.
- [ ] $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A relativi ad autovalori distinti.

Domanda [`simmB`] ♣ Sia A una matrice **simmetrica** 3×3. Indicare quali delle seguenti affermazioni sono sicuramente false, cioè sono in contraddizione con l'assunto su A:

- [ ] Gli autovalori di A sono 1 con molteplicità geometrica 2 e 3 con molteplicità geometrica 1
- [x] $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ è autovettore con autovalore 1 mentre $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ è autovettore con autovalore 2
- [x] A^T non sia simmetrica
- [ ] $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A relativi ad autovalori distinti.

Domanda [`simmC`] ♣ Sia A una matrice **simmetrica** 3×3. Indicare quali delle seguenti affermazioni sono sicuramente false, cioè sono in contraddizione con l'assunto su A:

- [x] Gli autovalori di A sono 1 e 3 entrambi con molteplicità geometrica 2
- [ ] $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ è autovettore con autovalore 1 mentre $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ è autovettore con autovalore 2
- [ ] $\dim \operatorname{Im} A = 2$.
- [x] $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A relativi a 3 autovalori distinti.

Domanda [`simmD`] ♣ Sia A una matrice **simmetrica** 3×3. Indicare quali delle seguenti affermazioni sono sicuramente false, cioè sono in contraddizione con l'assunto su A:

- [x] A ha come unico autovalore 1 e $\operatorname{rg}(A - I) = 1$
- [ ] $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ è autovettore con autovalore 1 mentre $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ è autovettore con autovalore 2
- [ ] $\dim \operatorname{Ker} A = 2$
- [x] $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A relativi a 3 autovalori distinti.

4. **(6 pt)** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Sia $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $Q(X) = X^{\mathrm{T}}AX$.

(a) Determinare gli autovalori di A e le relative molteplicità algebriche e geometriche.

(b) Determinare le equazioni cartesiane degli autospazi di A.

(c) Determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A.

(d) Si stabilisca il segno di q (cioè se q è definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita).