Corsi di Analisi Matematica
per la Laurea magistrale

ANALISI FUNZIONALE
(Giulio Schimperna)

ANALISI FUNZIONALE
ED EQUAZIONI DIFFERENZIALI
(Matteo Negri)

CALCOLO DELLE VARIAZIONI
(Maria Giovanna Mora)

EQUAZIONI DI EVOLUZIONE
(Elisabetta Rocca, Marco Veneroni)

Parole chiave?

- Problemi in cui le incognite sono **funzioni** (dipendono dallo spazio, dal tempo, da parametri discreti, da altre funzioni…)
- Modelli che sono descritti da **equazioni differenziali**
- Si studia **l'evoluzione** di un fenomeno dipendente dal tempo
- Per formularli, studiarli e risolverli (e per semplificarsi la vita…) si cercano e si applicano **princìpi variazionali**

Analisi funzionale e Calcolo delle Variazioni:
enorme semplificazione di fenomeni complessi,
descritti tramite princìpi generali e idee geometriche.

Due esempi

- Separazione di insiemi: il teorema di Von Neumann
- Problemi di minimo: Weierstrass e il Principio di Dirichlet

Intuizione geometrico/analitica

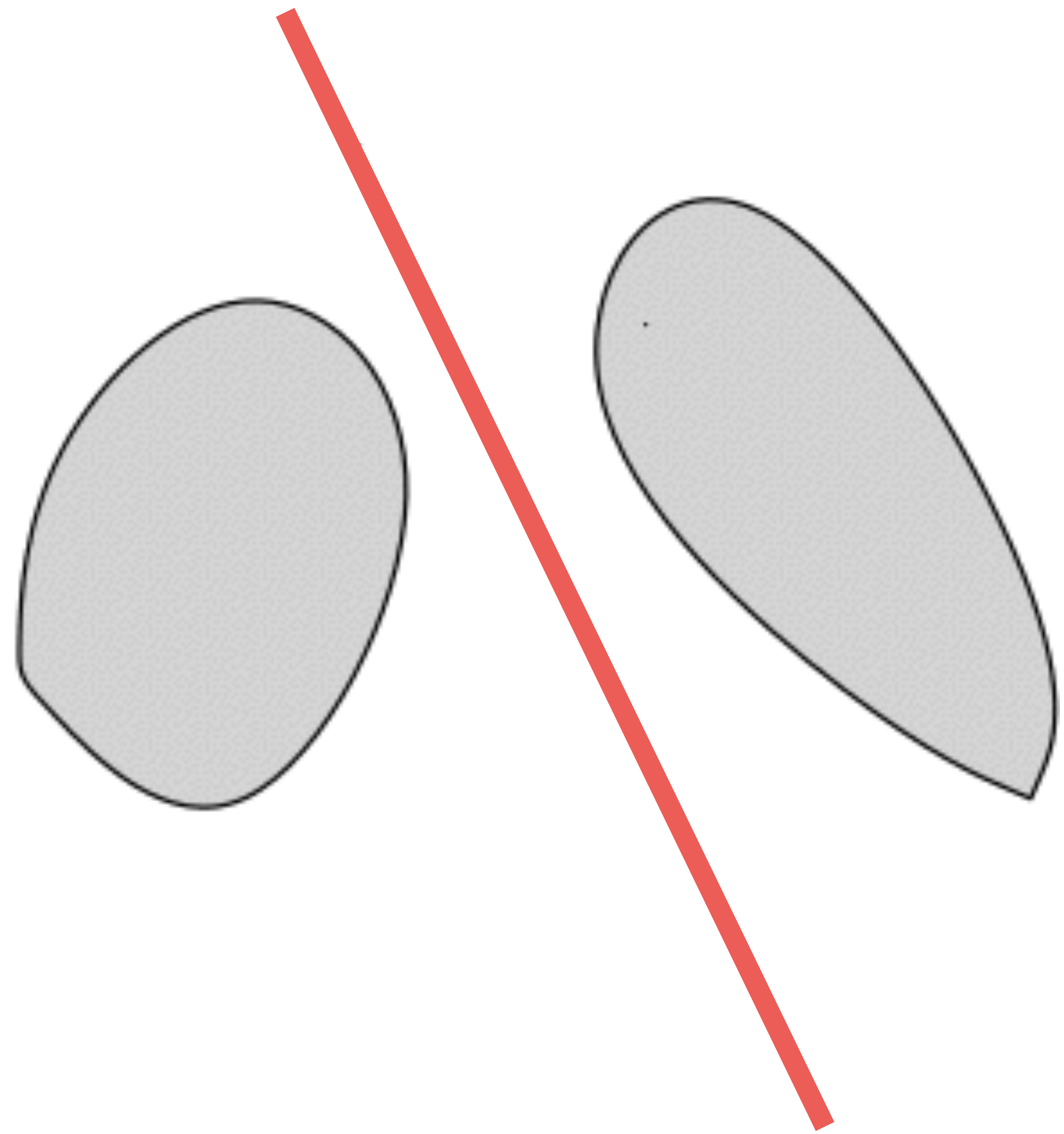
↓

Principio generale

↓

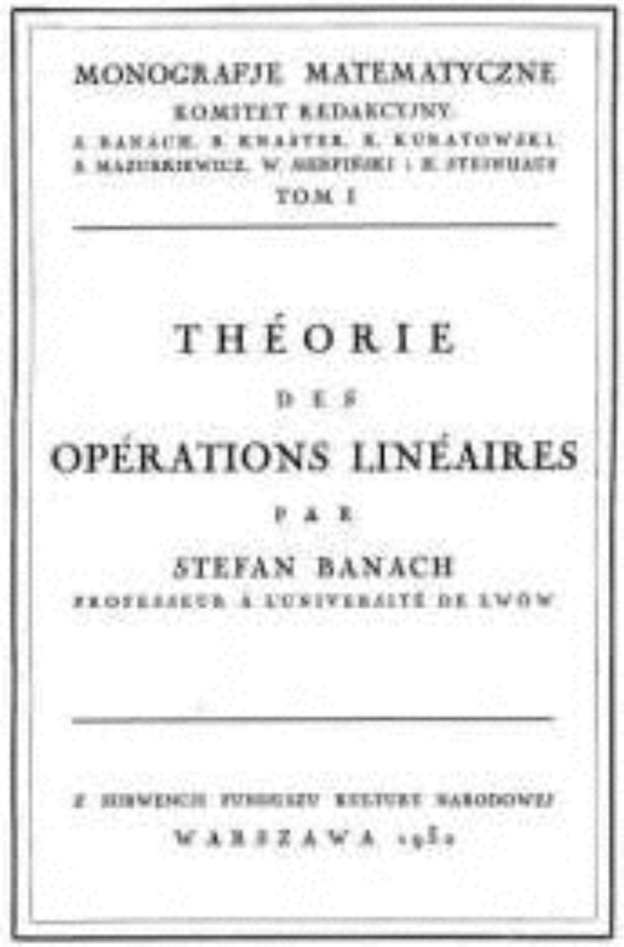
Applicazioni e sviluppi

Separazione di convessi



Il teorema di Hahn-Banach

Hans Hahn (1879-1934)



MONOGRAFJE MATEMATYCZNE

KOMITET REDAKCYJNY

TOM I

THÉORIE

DES

OPÉRATIONS LINÉAIRES

PAR

STEFAN BANACH

PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE LWÓW

WARSZAWA

Stefan Banach (1892-1945)

In ogni spazio vettoriale “ragionevole”
due convessi chiusi disgiunti di cui uno compatto
possono essere **separati da un iperpiano**

Il Libro, prego…

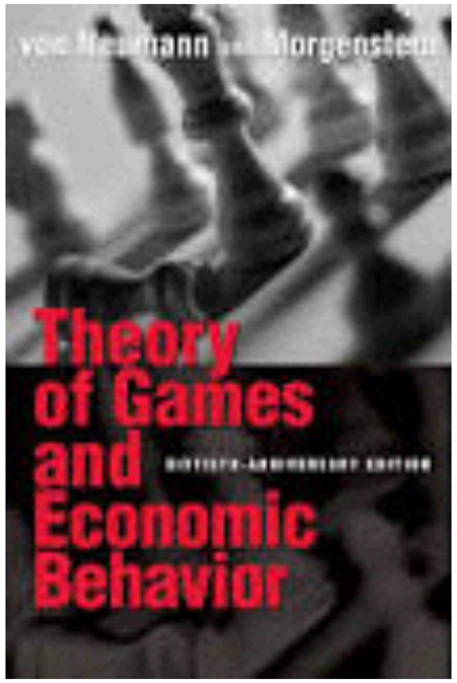
Banach, Ulam, Tarski, Steinhaus, Mazur, Kac, Schauder, Kuratowski

si trovavano quasi ogni giorno al Caffè Scozzese di **Leopoli**, proponendo vari problemi.

Dal ’35 al ’41 ne raccolsero **193** in un taccuino

…e chi li risolveva aveva un premio!

ma alcuni sono tuttora irrisolti…



Il Teorema di min-max di von Neumann

Siano $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ compatti e A una matrice $m \times n$.

$$\min_{x \in X} \max_{y \in Y} Ax \cdot y = \max_{y \in Y} \min_{x \in X} Ax \cdot y$$

Un'applicazione alle disequazioni variazionali (C. Baiocchi '04)

Trovare un vettore $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ con componenti $x_i \geq 0$ tale che $y = Ax$ abbia tutte le componenti ≥ 0.

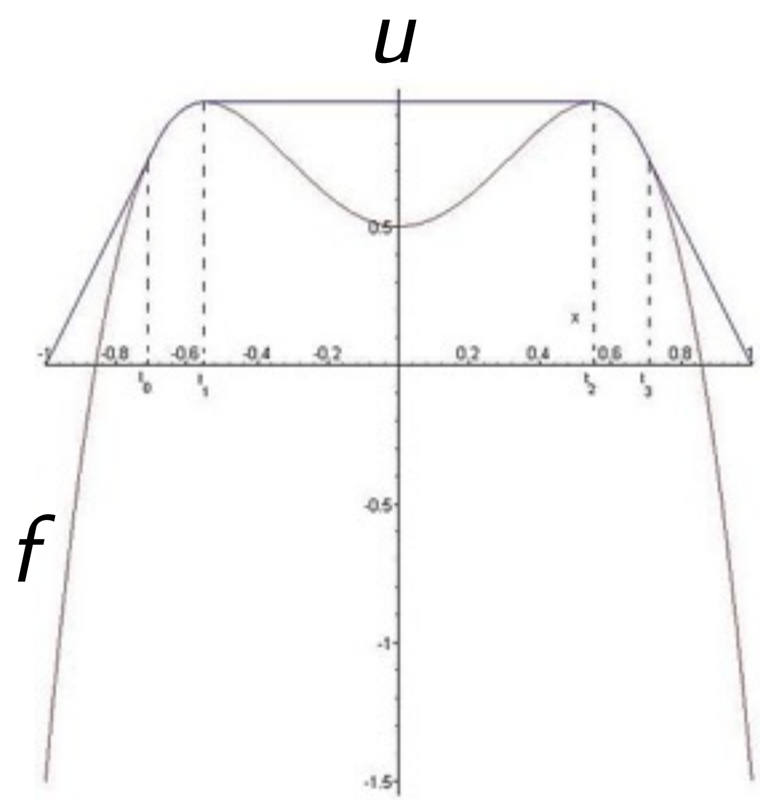
Si può se $a_{ij} + a_{ji} \geq 0$.

Il problema dell'ostacolo

f è l'ostacolo, u la soluzione definita in $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e nulla al bordo.

$$\min_u \ \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, \mathrm{d}x : \qquad u \geq f$$

$$u \geq f, \quad \Delta u \leq 0, \quad (u - f)\Delta u = 0$$



La versione "evolutiva"

$$u \geq f, \quad \frac{\partial}{\partial t} u - \Delta u \geq 0, \quad (u - f)(\frac{\partial}{\partial t} u - \Delta u) = 0$$

è parente del famoso **Problema di Skorokhod**
(il moto Browniano riflesso da un ostacolo)
ed è il prototipo di problemi molto più complessi.

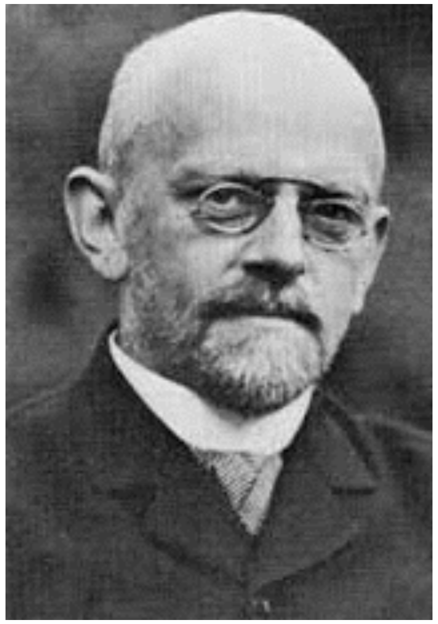
Problemi di minimo: il principio di Dirichlet…

Dirichlet (1805-1859) aveva capito che si potevano **risolvere equazioni differenziali complicate** come l'equazione "di Dirichlet" risolvendo un **problema di minimo**.

$$\min_u \int_\Omega \Big(|\nabla u(x)|^2 + f(x)u(x)\Big)\,\mathrm{d}x \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta u = f$$

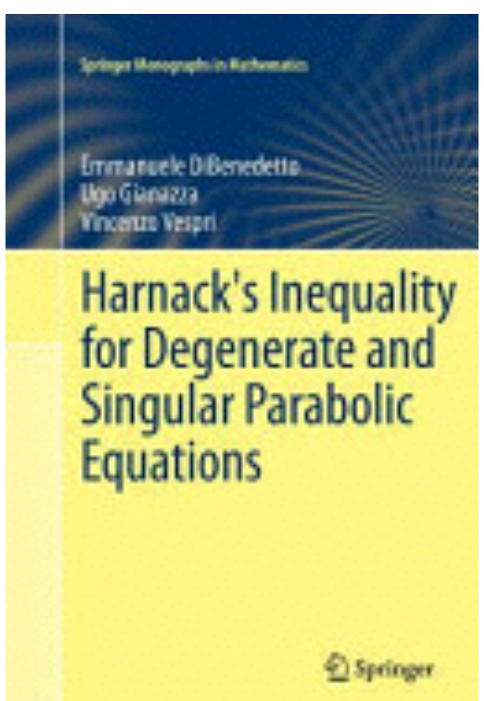
…ma Weierstrass (1815-1897) si rese conto che **l'esistenza di un minimo non è automatica** (Teorema di Weierstrass!).

… e i suoi sviluppi



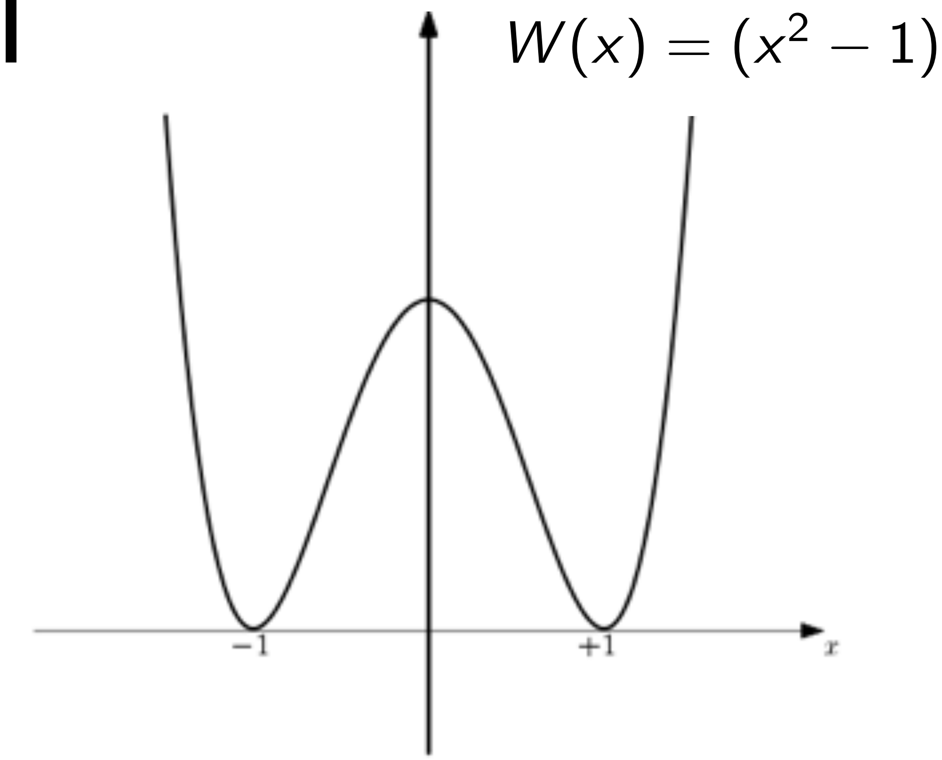
David Hilbert (1862-1943) mostrò come giustificare il principio di Dirichlet.
Nel 1900 pose una serie di **23 problemi** al Congresso Internazionale dei Matematici a Parigi

Il19: “**Le soluzioni dei problemi regolari del Calcolo delle Variazioni sono analitiche?**”
fu risolto nel ’56 da **Ennio De Giorgi**



La teoria della regolarità aperta da De Giorgi si è enormemente sviluppata in molte direzioni:
<u>superfici minime, mappe armoniche, sistemi ellittici e parabolici….</u>

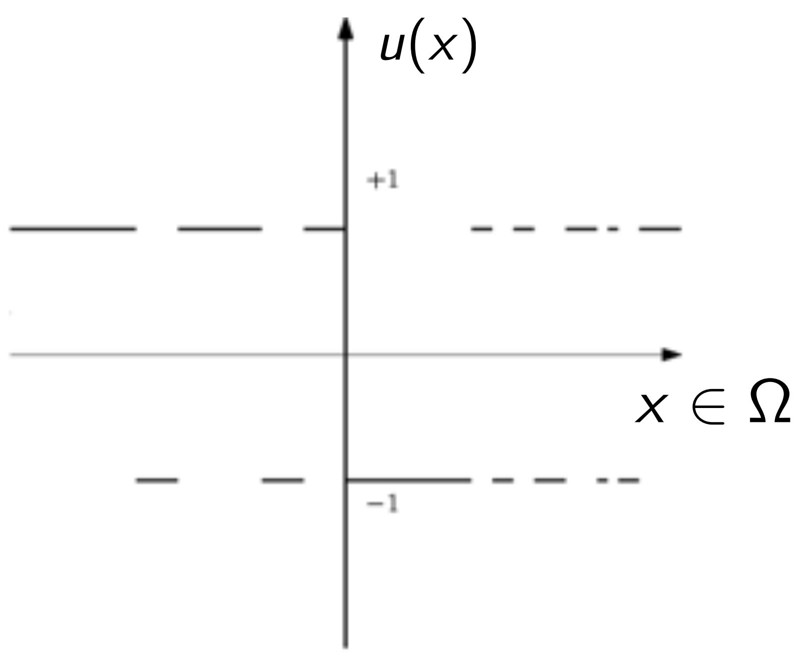
Minimi: competizioni e transizioni



$$\min_{x \in \mathbb{R}} W(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1$$

$$\Rightarrow \quad W'(x) = 0$$

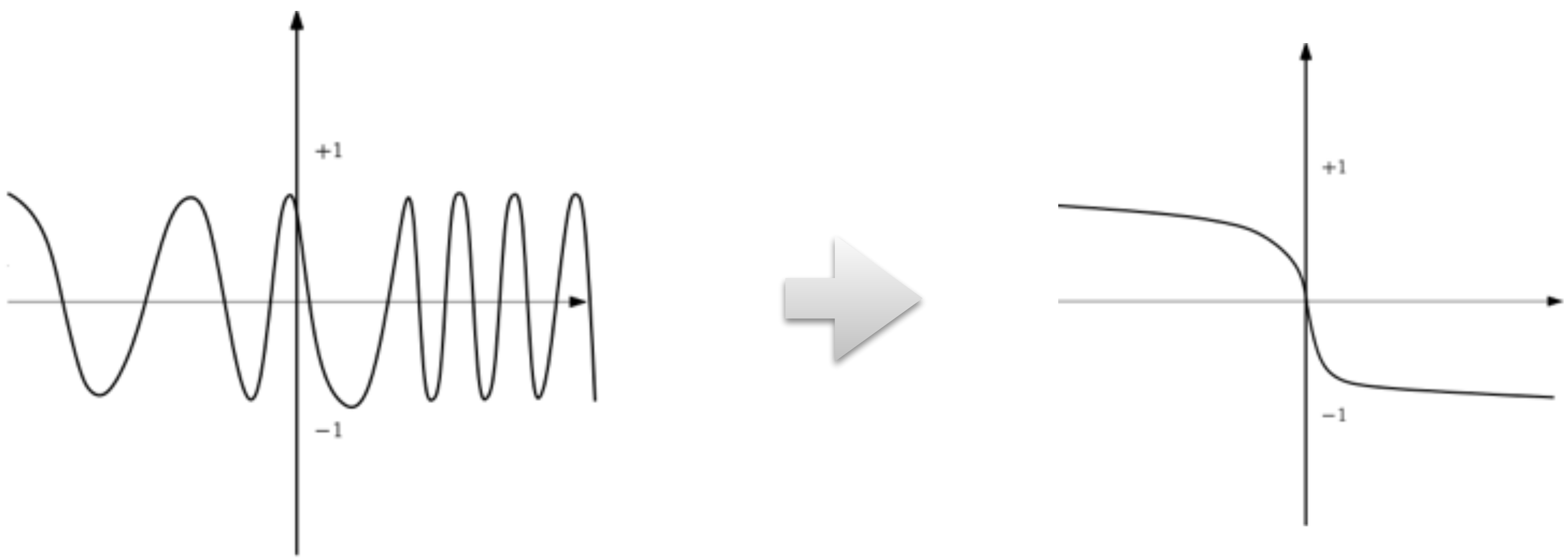
$$\min_{u:\Omega \to \mathbb{R}} \int_\Omega W(u(x))\,\mathrm{d}x \quad \Leftrightarrow \quad u(x) = \pm 1$$



La soluzione può “saltare”
liberamente tra +1 e -1,
anche infinite volte.
Come penalizzare le oscillazioni?

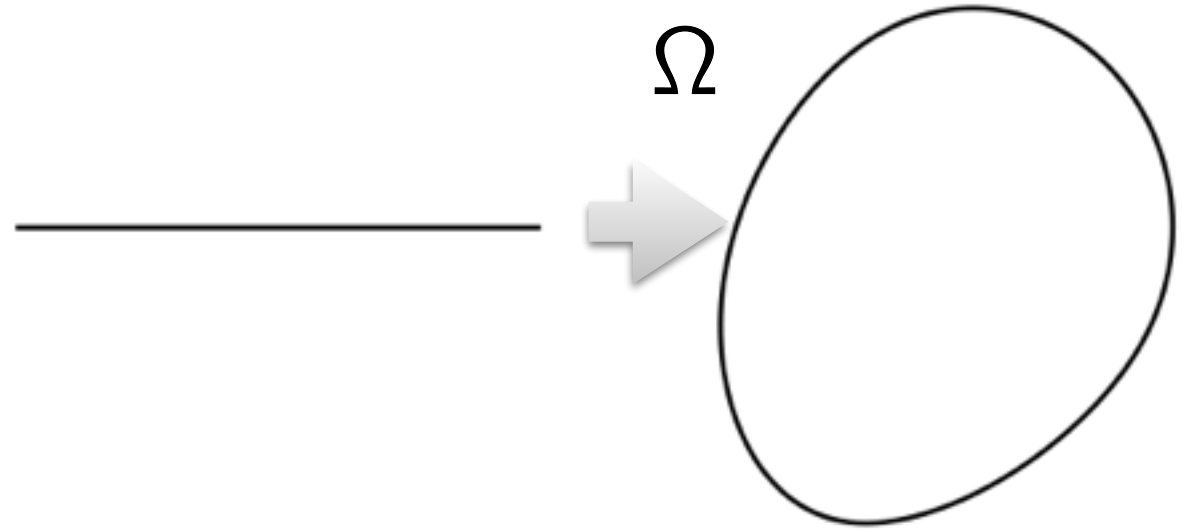
Transizioni di fase

$$\min_{u:\Omega\to\mathbb{R}} \int_\Omega \left(W(u(x)) + \frac{1}{2}|u'(x)|^2 \right) \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}u(x) + W'(u(x)) = 0$$



Variazioni sul tema (1)

Se ora aumentiamo il numero delle dimensioni di Ω



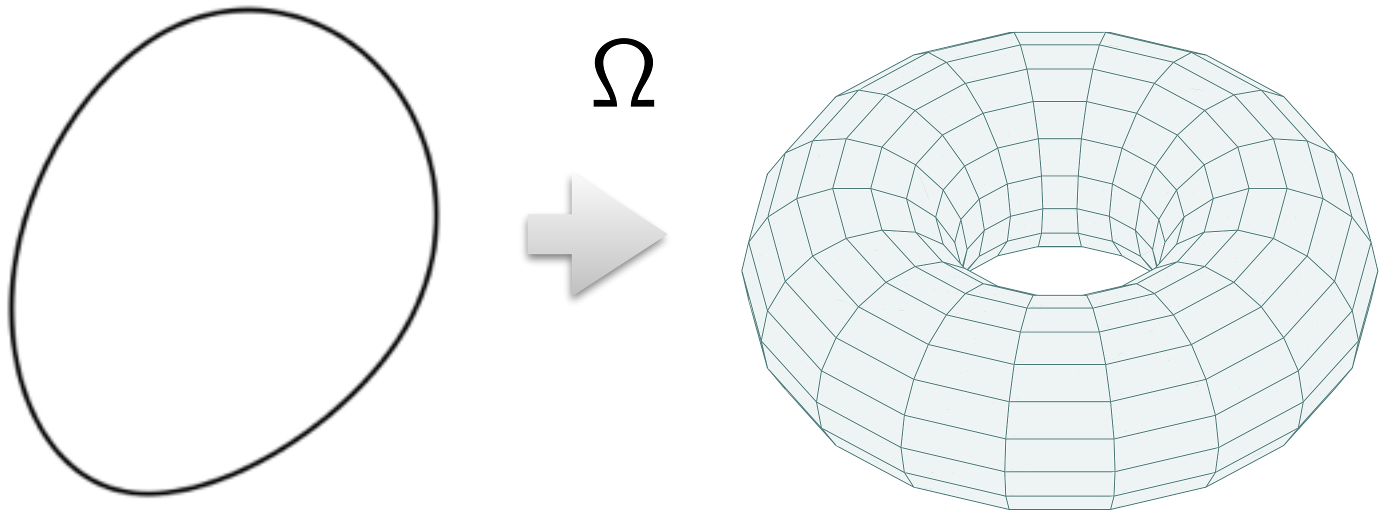
$$\min_{u:\Omega\to\mathbb{R}} \int_\Omega \left(W(u(x)) + \frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2 \right) \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad -\Delta u(x) + W'(u(x)) = 0$$

Questo è il problema prototipo
dei **modelli di transizione di fase**,
anche in versione evolutiva

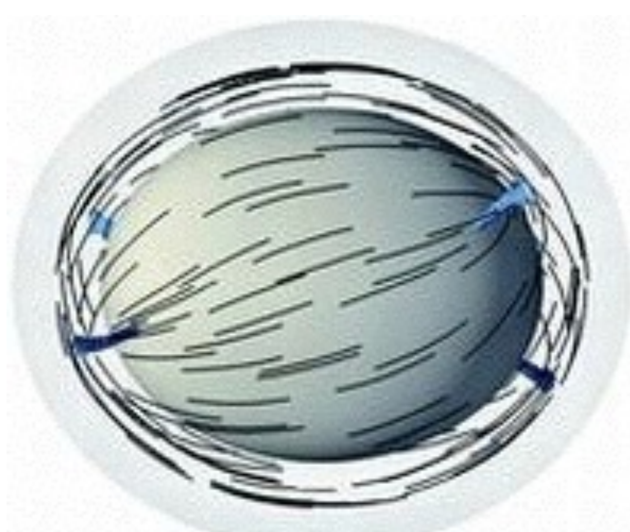
$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) - \Delta u(x,t) + W'(u(x,t)) = 0$$

Variazioni sul tema (2)

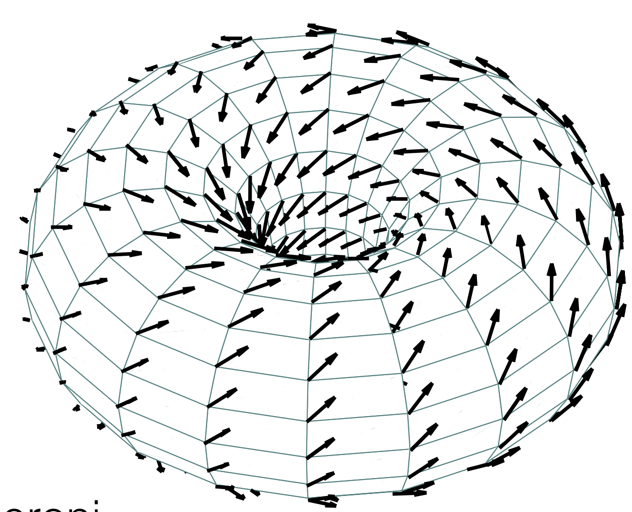
Se ora “curviamo” Ω e pensiamo $\mathbf{u}$ come un campo vettoriale



$$\min_{u:\Omega\to\mathbb{R}^3} \int_\Omega \Big(W(x, \mathbf{u}(x)) + E(\mathrm{D}\mathbf{u}(x)) \Big)\, \mathrm{d}x$$



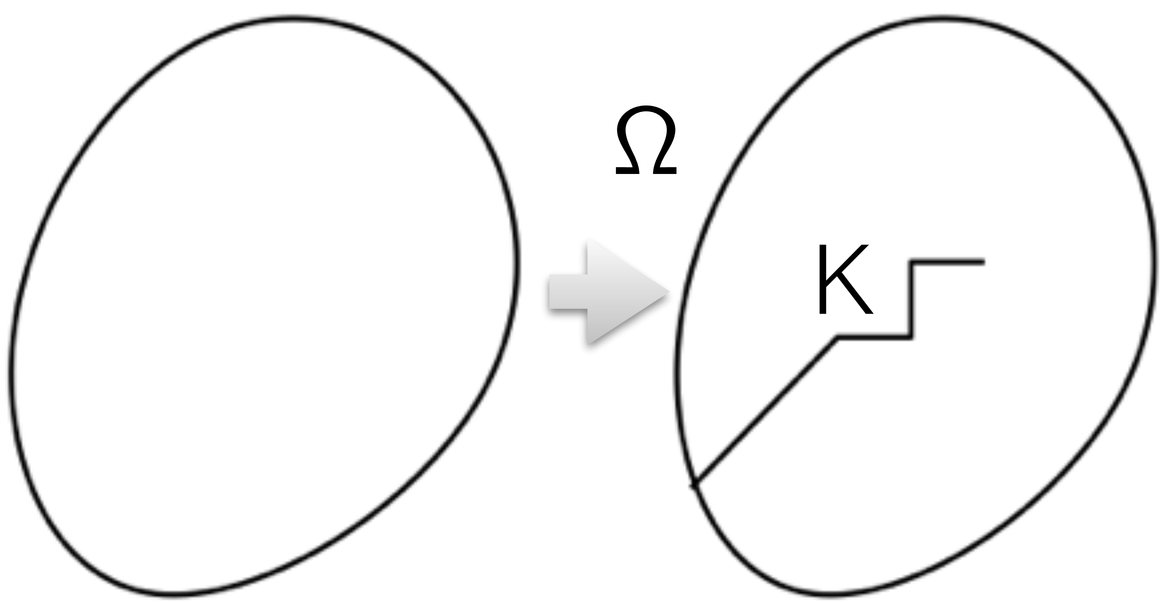
Modello per un film sottile di cristalli liquidi

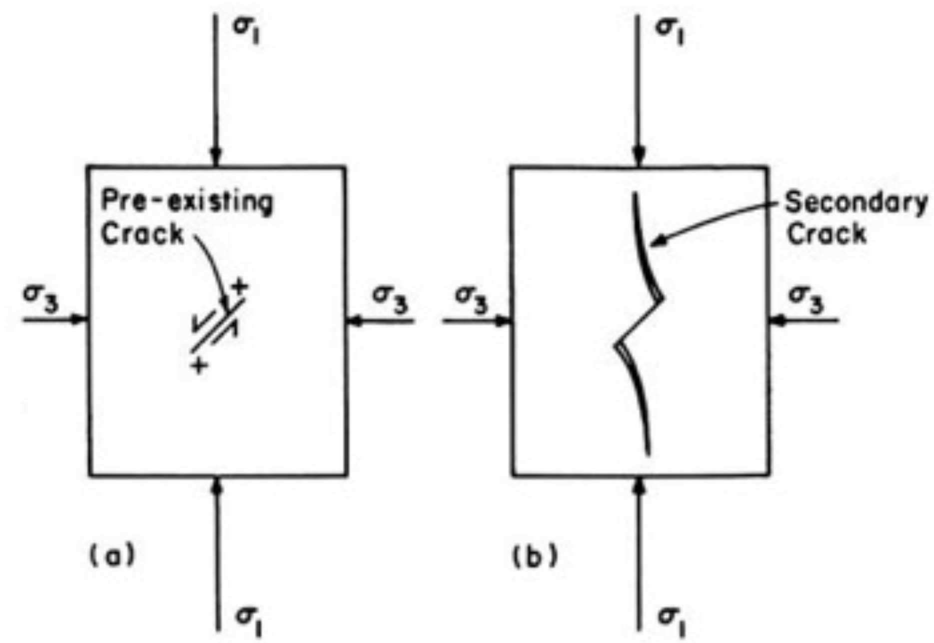


A.Segatti, M. Veneroni

Variazioni sul tema (3)

Se permettiamo a Ω di avere delle “fratture”





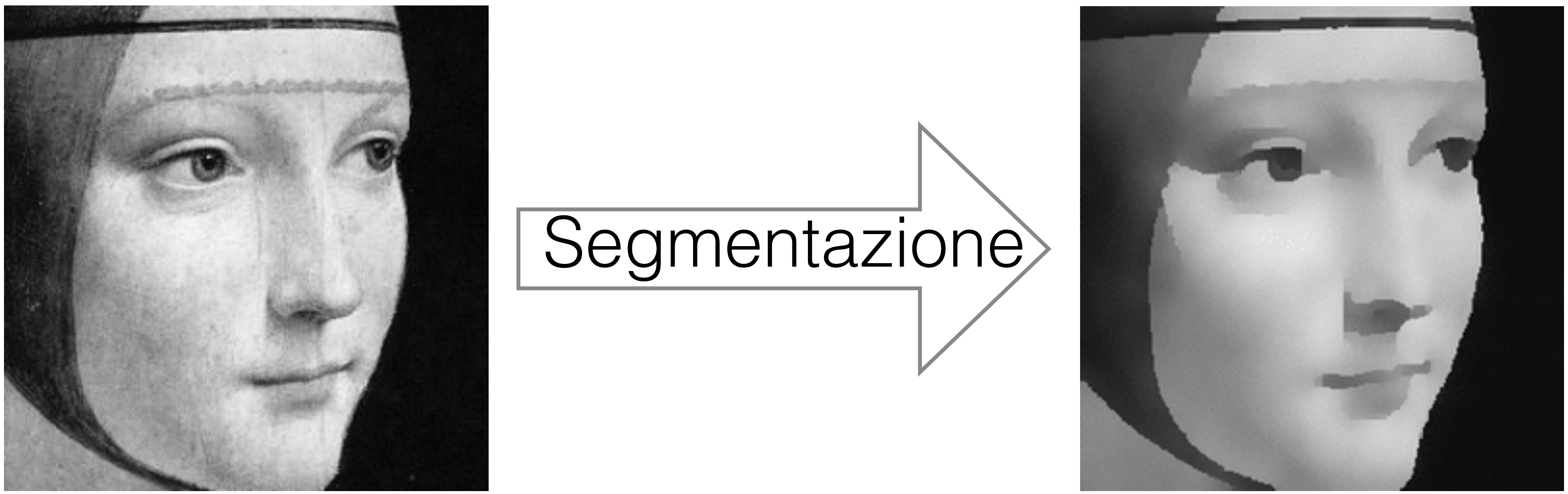
$$\min_{K,u} \int_{\Omega \setminus K} \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 \, \mathrm{d}x + \mathrm{lungh}(K)$$

si trovano i problemi con “discontinuità libere”
che intervengono in modelli di frattura

Variazioni sul tema (4)

Se ora Ω è il dominio di un'immagine descritta da una funzione $g : \Omega \to [0,1]$ che rappresenta i livelli di grigio

g

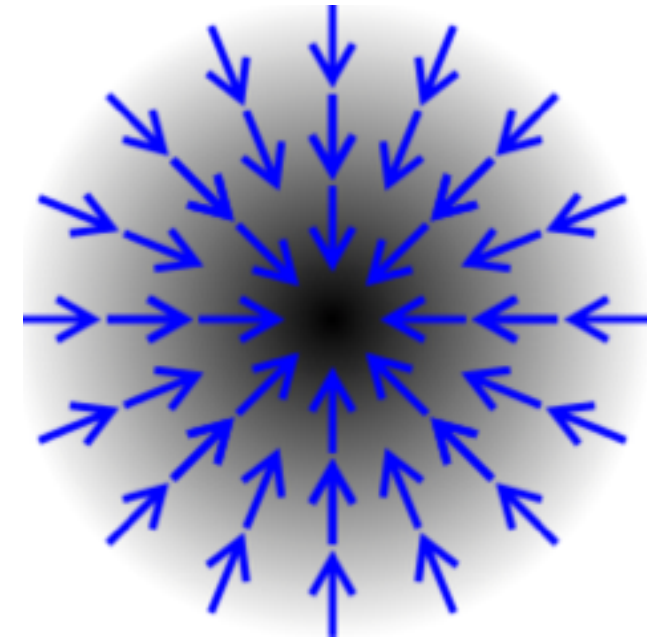


u

M. Negri

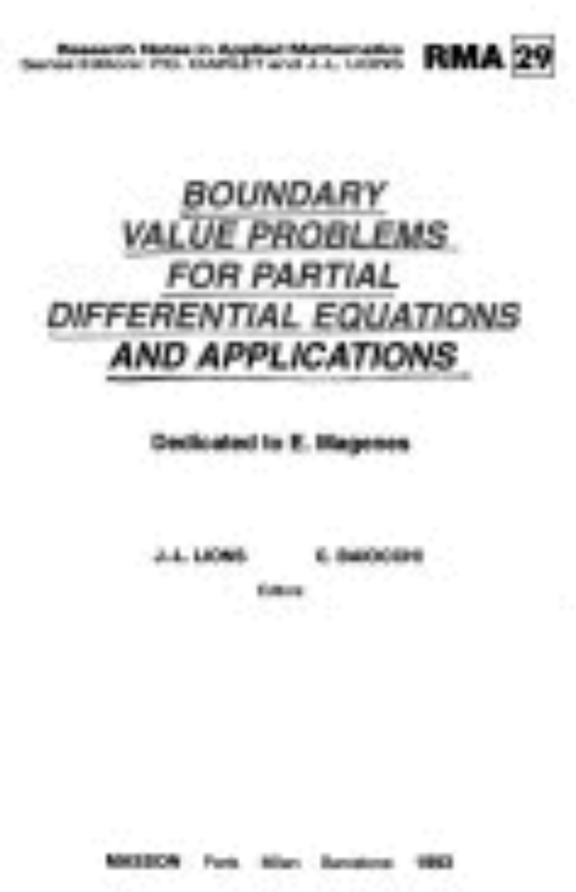
$$\min_{K,u} \int_{\Omega \setminus K} \left(\frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 + |u(x) - g(x)|^2 \right) \mathrm{d}x + \mathrm{lungh}(K)$$

Come trattare l'evoluzione?



Flussi gradiente:

$$\min_u E(u) \quad \rightsquigarrow \quad u'(t) = -\nabla E(u(t))$$



Movimenti minimizzanti (E. De Giorgi)

$$U^0 \text{ dato}, \; U^n \approx u(n\tau)$$

Dato U^{n-1} si calcola U^n come minimo di

$$\boxed{\min E(U) + \frac{1}{2\tau}|U - U^{n-1}|^2}$$

La “scuola di Pavia”


Enrico Magenes


Claudio Baiocchi


Gianni Gilardi


Pierluigi Colli


Maria Giovanna Mora


Matteo Negri


Ugo Gianazza


Giulio Schimperna


Elisabetta Rocca


Enrico Vitali


Fabio Cavalletti


Simona Fornaro


Antonio Segatti


Marco Veneroni


Stefano Lisini

Temi e collaborazioni

- Problemi di transizione di fase, con applicazioni a vari modelli biologici e di fluidodinamica (crescita tumorale, cristalli liquidi, controllo).
- Attrattori per sistemi dinamici in dimensione infinita
- Regolarità per equazioni di evoluzione
- Modelli variazionali per la plasticità, le dislocazioni di difetti, e le fratture.
- Segmentazione di immagini, energie di interazione, modelli discreti
- Problemi di ottimizzazione, trasporto-entropia
- Flussi gradienti, analisi in varietà Riemanniane e spazi metrici
- ….

Trieste (SISSA)
Pisa (Scuola Normale)
Roma
Berlino (Weierstrass Institute)
Monaco
Bonn
Praga
Vienna
Eindhoven
Parigi
Caltech
….