Corso di Geometria 2 - a.a. 2013-2014
Prova scritta del 16 settembre 2014

Esercizio 1 Sia

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x + y + z = 0,\ 2x + y + 3z = 0\},$$

Determinare il gruppo fondamentale di $\mathbb{R}^3 \setminus X$.

Esercizio 2 Si consideri il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \mid\ z = \sqrt{x^2 + y^2}\ \}.$$

1. Mostrare che S è una superficie regolare e orientabile.
2. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y, z) = (x^2 + y^2 - z^2, y + x^2 + 1)$. Mostrare che $C := F^{-1}(0, 0) \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid\ z > 0\}$ è una sottovarietà di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 contenuta in S.
3. Siano $P = (0, -1, 1)$, $v = (1, 0, 0)$. Mostrare che $P \in C$ e $v \in T_P C$.
4. Calcolare la curvatura normale di S lungo la direzione tangente data da v.

Esercizio 3 Sia $\underline{\alpha} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva differenziabile regolare e $\pi \subset \mathbb{R}^3$ il piano di equazione $< \underline{x}, \underline{N} >= d$, dove $\underline{N}$ è un vettore fissato non nullo in $\mathbb{R}^3$ e $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Si consideri la funzione $F \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$F(t) =< \underline{\alpha}(t), \underline{N} > -d.$$

1. Verificare che $F(t_0) = 0$ se e solo se $\underline{\alpha}(t_0) \in Tr(\underline{\alpha}) \cap \pi$.
2. Verificare che $F'(t_0) = 0$ se e solo se il vettore $\underline{\alpha}'(t_0)$ è parallelo a π.
3. Dimostrare che se $k_{\underline{\alpha}}(t_0) \neq 0$ e valgono

   $$F(t_0) = F'(t_0) = F''(t_0) = 0,$$

   allora π coincide con il piano osculatore a α in t_0.