CORSO DI GEOMETRIA 2

Appello del 24 settembre 2012

Esercizio 1

Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione C^∞ e sia $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva definita da $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), f(t))$.

(1) Dimostrare che α è una curva biregolare.
(2) Calcolare la curvatura e la torsione di α in ogni punto.
(3) Assumendo che $|\alpha'|$ sia una costante diversa da 1, si dica se $\alpha(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^3 \setminus \alpha(\mathbb{R})$ sono omotopicamente equivalenti.
(4) Fornire un esempio in cui f non è costante e $\alpha(\mathbb{R})$ non è semplicemente connesso.

Esercizio 2

Sia $\phi : \mathbf{R}_{>0} \times (a, b) \to \mathbb{R}^3$, $\phi(u, v) := (u^2, v^2, f(v))$ dove $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è un diffeomorfismo sull'immagine.

(1) Dimostrare che $S := Im(\phi)$ è una superficie regolare orientabile.
(2) Dire se esiste un aperto di S localmente isometrico ad una sfera.
(3) Dire se i punti della forma $\phi(u, 0)$, $u \in \mathbb{R}_{>0}$ sono punti ombelicali.
(4) Dire se le curve coordinate sono linee di curvatura.

Esercizio 3

Sia S una superficie regolare in $\mathbb{R}^3$ senza punti planari e con curvatura media $H = 0$ in ogni punto. Per ogni $p \in S$ dire quante sono le direzioni asintotiche in p.