Modellistica Numerica

Università di Pavia

26 febbraio 2019 — ore 10:00 — aula E10

Punti totali: 33 Durata dell'esame: 2 ore.

Problema 1. Differenze finite per un problema ellittico [16 punti]

(a) Siano $x \in \mathbb{R}$, $h > 0$ e sia f una funzione reale sufficientemente liscia. Mostrare che la differenza finita centrata $D_h^{2C} f(x) = \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$ approssima $f''(x)$ con ordine quadratico in h.

(b) Sia g una seconda funzione reale sufficientemente liscia. Mostrare che la differenza finita

$$D_{h,g} f(x) := \frac{g(x+\frac{h}{2})f(x+h) - [g(x+\frac{h}{2}) + g(x-\frac{h}{2})]f(x) + g(x-\frac{h}{2})f(x-h)}{h^2} \tag{1}$$

approssima la derivata del prodotto $(gf')'(x)$ con ordine quadratico in h.

Suggerimento: scrivere l'espansione di Taylor di g per un passo opportuno e combinarla con quella di f. Nell'espansione di $D_{h,g} f(x)$ ignorare i termini di grado sufficientemente alto.

(c) Dato un intervallo (a, b), fissare i nodi equispaziati $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b$ per $n \in \mathbb{N}$, con $h := x_j - x_{j-1} = \frac{b-a}{n+1}$.

Usare (1) per scrivere un metodo alle differenze finite sui nodi x_j per l'approssimazione del problema al bordo

$$-(Pu')' + qu = f \quad \text{in } (a,b), \qquad u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta,$$

dove $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $q \geq 0, P > 0, f$ sono tre funzioni reali sufficientemente lisce in $[a, b]$.

Ricordando (1), fare attenzione alla scelta dei punti in cui è valutata P.

(d) Scrivere matrice e termine noto del sistema lineare $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{b}}$ ottenuto.

Verificare che se $P \equiv 1$ il sistema lineare si riduce a quello già noto per $-u'' + qu = f$.

(e) Stabilire se la matrice $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ è sparsa, tridiagonale, simmetrica, a predominanza diagonale, a predominanza diagonale stretta, o quali ipotesi ulteriori sono necessarie per garantire queste proprietà.

Soluzione: In (a)–(b) usiamo le espansioni di Taylor di f e g e passo h e $h/2$, rispettivamente:

$$f(x \pm h) = f(x) \pm hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) \pm \frac{h^3}{6}f'''(x) + \mathcal{O}(h^4),$$

$$g\Big(x \pm \frac{h}{2}\Big) = g(x) \pm \frac{h}{2}g'(x) + \frac{h^2}{8}g''(x) \pm \frac{h^3}{48}g'''(x) + \mathcal{O}(h^4),$$

(a)
$$f''(x) - D_h^{2C} f(x) = f''(x) - \frac{1}{h^2}\Big(f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) - 2f(x) + f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + \mathcal{O}(h^4)\Big) = \mathcal{O}(h^2).$$

(b) Raccogliendo le derivate di f e trascurando i termini grado almeno $\mathcal{O}(h^4)$:

$$\begin{aligned}
h^2 D_{h,g} f(x) &= g\Big(x+\frac{h}{2}\Big)f(x+h) - \Big[g\Big(x+\frac{h}{2}\Big) + g\Big(x-\frac{h}{2}\Big)\Big]f(x) + g\Big(x-\frac{h}{2}\Big)f(x-h)\\
&= \Big[g(x) + \frac{h}{2}g'(x) + \frac{h^2}{8}g''(x) + \frac{h^3}{48}g'''(x) + \mathcal{O}(h^4)\Big]\Big[f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \mathcal{O}(h^4)\Big]\\
&\quad - \Big[2g(x) + \frac{h^2}{4}g''(x) + \mathcal{O}(h^4)\Big]f(x)\\
&\quad + \Big[g(x) - \frac{h}{2}g'(x) + \frac{h^2}{8}g''(x) - \frac{h^3}{48}g'''(x) + \mathcal{O}(h^4)\Big]\Big[f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + \mathcal{O}(h^4)\Big]
\end{aligned}$$

$$= f(x)\mathcal{O}(h^4) + f'(x)\Big[h^2 g'(x) + \mathcal{O}(h^4)\Big] + f''(x)\Big[h^2 g(x) + \mathcal{O}(h^4)\Big] + f'''(x)\mathcal{O}(h^4) + \mathcal{O}(h^4)$$
$$= h^2[f'(x)g'(x) + f''(x)g(x)] + \mathcal{O}(h^4) = h^2[f'(x)g(x)]' + \mathcal{O}(h^4)$$

da cui segue la tesi $\quad D_{h,g}f(x) - [f'(x)g(x)]' = \mathcal{O}(h^2)$.

Attenzione: non è necessario calcolare *tutti* i prodotti tra i termini nelle parentesi quadre. Raccogliendo i termini moltiplicati per f, quelli per f', ..., si vede immediatamente quali termini si cancellano e quali sopravvivono.

(c) Approssimando l'equazione differenziale in un nodo x_j con

$$-D_{h,P}u(x_j) + q(x_j)u(x_j) \approx -(Pu')'(x_j) + q(x_j)u(x_j) = f(x_j)$$

otteniamo le equazioni

$$-\frac{P(x_j+\frac{h}{2})U_{j+1} - [P(x_j+\frac{h}{2}) + P(x_j-\frac{h}{2})]U_j + P(x_j-\frac{h}{2})U_{j-1}}{h^2} + q(x_j)U_j = f(x_j) \qquad 1 \le j \le n,$$
$$U_0 = \alpha, \qquad U_{n+1} = \beta.$$

Qui U_j rappresenta l'approssimazione numerica di $u(x_j)$.

(d) La matrice ed il termine noto coincidono con quelli noti per $P \equiv 1$:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} \frac{P(x_1+\frac{h}{2})+P(x_1-\frac{h}{2})}{h^2} + q(x_1) & -\frac{P(x_1+\frac{h}{2})}{h^2} & & \\ -\frac{P(x_1+\frac{h}{2})}{h^2} & \frac{P(x_2+\frac{h}{2})+P(x_2-\frac{h}{2})}{h^2} + q(x_2) & -\frac{P(x_2+\frac{h}{2})}{h^2} & \\ & -\frac{P(x_2+\frac{h}{2})}{h^2} & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} f(x_1) + \frac{P(a+\frac{h}{2})\alpha}{h^2} \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_n) + \frac{P(b-\frac{h}{2})\beta}{h^2} \end{pmatrix}.$$

(e) La matrice è tridiagonale, quindi sparsa.

È simmetrica in quanto $x_j + \frac{h}{2} = x_{j+1} - \frac{h}{2}$.

È a predominanza diagonale, poiché $q \ge 0$, ma è necessario che $q > 0$ (almeno in tutti i nodi interni) affinché sia a predominanza diagonale stretta.

Problema 2. Codice da completare: differenze finite [5 punti]

Completare il seguente codice Matlab per l'approssimazione del problema di Dirichlet

$$-u''(x) + \frac{1}{(1+x)^2}u(x) = -\frac{1}{(1+x)^3} \qquad x \in (0,1), \qquad u(0) = 1, \quad u(1) = \frac{1}{2}$$

con il metodo delle differenze finite.

```
n     = 50;
a     = 0;
b     = 1;
alfa  = 1;
beta  = 0.5;
f_fun = @(x) -(1+x).^(-3);
q_fun = @(x)  (1+x).^(-2);

h   = [ (1) ]
xx  = [ (2) ]
x   = xx(2:end-1);
q_v = q_fun(x)';
f_v = f_fun(x)';
M   = [ (3) ]
A   = spdiags( M, [-1,0,1], n,n );
B   = [ (4) ]
U   = A\B;
plot( xx, [ (5) ] );
```

SOLUZIONE: Una possibile soluzione è la seguente:

```
n     = 50;
a     = 0;
b     = 1;
alfa  = 1;
beta  = 0.5;
f_fun = @(x) -(1+x).^(-3);
q_fun = @(x)  (1+x).^(-2);

h   = (b-a)/(n+1);
xx  = linspace(a,b,n+2);
x   = xx(2:end-1);
q_v = q_fun(x)';
f_v = f_fun(x)';
M   = [-ones(n,1)/h^2, 2*ones(n,1)/h^2 + q_v, -ones(n,1)/h^2];
A   = spdiags( M, [-1,0,1], n,n );
B   = f_v + [alfa/h^2;zeros(n-2,1);beta/h^2];
U   = A\B;
plot( xx, [alfa; U; beta] );
```

Problema 3. Equazione del calore con condizioni di Neumann [12 punti]

Considerare il problema ai valori iniziali per l'equazione del calore con condizioni al bordo di Neumann:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{in } (0,1)\times(0,T) \\ u(x,0) = u^0(x) & x \in (0,1), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 & t \in (0,T), \end{cases}$$

dove $T > 0$ e $u^0 \in C^0([0,1])$ sono dati.

(a) Assumiamo che la soluzione sia separabile, cioè possa essere scritta come prodotto di due funzioni di una sola variabile: $u(x,t) = \mathsf{X}(x)\mathsf{T}(t)$. Derivare l'espressione di u.

(b) Esistono soluzioni di questo problema ai valori iniziali che non decadono a 0 per $t \to \infty$ ($T = \infty$)? Giustificare la risposta.

(c) Ripetere il punto (a) per il problema con condizioni al bordo miste, cioè Dirichlet a sinistra ($x = 0$) e Neumann a destra ($x = 1$):

$$u(0,t) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 \qquad t \in (0,T).$$

Suggerimento: provare a disegnare il grafico delle possibili funzioni $\mathsf{X}(x)$ può essere d'aiuto.

Soluzione: (a) L'equazione del calore diventa $\mathsf{X}(x)\mathsf{T}'(t) = \mathsf{X}''(x)\mathsf{T}(t)$. Dividendo per $\mathsf{X}(x)\mathsf{T}(t)$ troviamo $\mathsf{T}'(t)/\mathsf{T}(t) = \mathsf{X}''(x)/\mathsf{X}(x) = \lambda$, dove il valore λ deve essere indipendente da x e da t. L'uguaglianza $\mathsf{X}''(x) = \lambda\mathsf{X}(x)$ indica che il fattore $\mathsf{X}(x)$ di $u(x,t) = \mathsf{X}(x)\mathsf{T}(t)$ deve essere autofunzione dell'operatore differenziale in spazio, cioè di $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ con le condizioni al bordo $\frac{\partial \mathsf{X}}{\partial x}(0) = \frac{\partial \mathsf{X}}{\partial x}(1) = 0$ e deve essere $\mathsf{X}(x) = \cos(\pi\ell x)$ (a meno di una costante moltiplicativa) e $\lambda = -(\pi\ell)^2$ per qualche $\ell = 0,1,2,\ldots$. L'espressione di $\mathsf{T}(t)$ segue immediatamente da $\mathsf{T}'(t) = \lambda\mathsf{T}(t) = -(\pi\ell)^2\mathsf{T}(t)$, cioè $\mathsf{T}(t) = \mathrm{e}^{-\pi^2\ell^2 t}$. Concludiamo che

$$u(x,t) = c\,\cos(\pi\ell x)\,\mathrm{e}^{-\pi^2\ell^2 t} \quad \text{per qualche } \ell = 0,1,2,\ldots, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(b) Sì, $u(x,t) = 1$ per ogni x e t è soluzione del problema e non decade a zero.
(Corrisponde alla soluzione separabile del punto (a) per $\ell = 0$.)
(c) Ripetendo lo stesso ragionamento si ottiene $\mathsf{X}(x) = \sin(\pi(\ell + 1/2)x)$ e $\lambda = -\pi^2(\ell + 1/2)^2$, quindi $u(x,t) = c\sin(\pi(\ell+1/2)x)\mathrm{e}^{-\pi^2(\ell+1/2)^2 t}$ per qualche $\ell = 0,1,2,\ldots$ e $c \in \mathbb{R}$.
