Modellistica Numerica

Università di Pavia

23 Gennaio 2018 — Ore 10:00 — Aula C8

Ogni esercizio ha lo stesso valore. Durata dell'esame: 2 ore.

Problema 1. Errore di troncamento delle differenze finite

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione liscia e siano $x_0, h \in \mathbb{R}$ con $h > 0$. Vogliamo approssimare la derivata prima $f'(x_0)$ con delle differenze finite.

1. Mostrare che l'errore commesso dalle differenze finite centrate $D_h^C f(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ ha ordine di convergenza quadratico in h.
2. Ora supponiamo di avere a disposizione solo i valori di $f(x_0)$, $f(x_0+h)$ e $f(x_0+2h)$.

   Determinare dei valori per $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che la differenza finita nella forma

$$D_h^{\#} f(x_0) = \frac{af(x_0) + bf(x_0+h) + cf(x_0+2h)}{h}$$

   approssimi $f'(x_0)$ con ordine quadratico in h. Mostrare che l'errore è effettivamente quadratico.

Suggerimento: usare l'espansione di Taylor di f centrata in x_0.

Problema 2. Il codice misterioso

Sia fissata una variabile Matlab `n` $\in \mathbb{N}$.

1. Descrivere cosa fa il seguente comando Matlab:

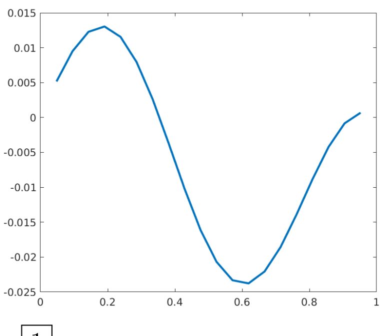
```
plot((1:n)/(n+1), spdiags(ones(n,1)*[-(n+1)^2, 1+2*(n+1)^2,-(n+1)^2], [-1,0,1],n,n)...
      \ exp(2*(1:n)'/(n+1)) );
```

   Quale problema al bordo viene risolto?

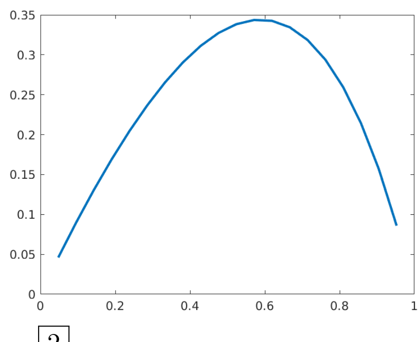
2 Sia fissato `n=20`. Quale dei seguenti grafici è generato dal comando mostrato sopra?

   Giustificare la risposta.

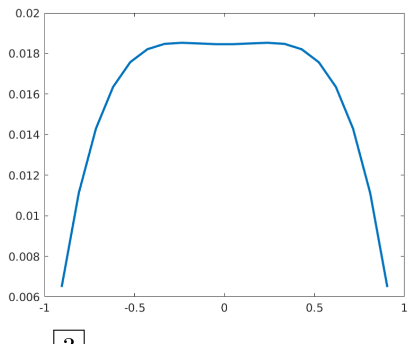
   Suggerimento: osservare gli assi cartesiani.



1



2



3

Problema 3. Il principio di Ritz astratto

Sia V uno spazio di Hilbert, $\mathcal{F}(\cdot)$ un funzionale lineare continuo su V, e $\mathcal{A}(\cdot,\cdot)$ una forma bilineare continua e coerciva in V. Assumiamo inoltre che $\mathcal{A}(\cdot,\cdot)$ sia simmetrica, cioè $\mathcal{A}(u,w) = \mathcal{A}(w,u)$ per ogni $u, w \in V$. Definiamo il funzionale quadratico $J(w) := \frac{1}{2}\mathcal{A}(w,w) - \mathcal{F}(w)$ per $w \in V$.

Dimostrare che il problema variazionale astratto

$$\text{trovare } u \in V \text{ tale che } \mathcal{A}(u,w) = \mathcal{F}(w) \qquad \forall w \in V \tag{1}$$

è equivalente al problema di minimo

$$\text{trovare } u \in V \text{ tale che } J(u) = \min_{w \in V} J(w). \tag{2}$$

("Equivalente" significa che ogni u soluzione di (1) è anche soluzione di (2), e viceversa.)

Suggerimento: ricordare la dimostrazione del principio di Ritz per un problema al bordo.

Problema 4. Equazione di Helmholtz

Consideriamo il problema al bordo

$$-u''(x) - Q\,u(x) = f(x) \quad \text{in } (a,b), \qquad u(a) = u(b) = 0,$$

dove $(a,b) \subset \mathbb{R}$, $f \in C^0([a,b])$ e Q è un numero positivo (notare il segno meno davanti a Q).

1. Mostrare che se $u \in C^2(a,b)$ è soluzione classica del problema al bordo, allora è anche soluzione debole del seguente problema variazionale:

$$\text{trovare } u \in H^1_0(a,b) \text{ tale che } \qquad \int_a^b (u'w' - Quw)\,\mathrm{d}x = \int_a^b fw\,\mathrm{d}x \qquad \forall w \in H^1_0(a,b).$$

2. Scrivere questo problema debole in forma variazionale astratta.

3. Assumiamo che $0 < Q < 1/C_P^2$, dove C_P è la costante di Poincaré cioè $\|w\|_{L^2(a,b)} \le C_P\,|w|_{H^1(a,b)}$ $\forall w \in H^1_0(a,b)$.

   Dimostrare che questo problema soddisfa le ipotesi del Teorema di Lax–Milgram.

4. Fissare per semplicità $(a,b) = (0,1)$. Mostrare che esistono valori positivi di Q per cui il problema debole *non* è ben posto.

   Suggerimento: mostrare che non vale l'unicità della soluzione per un problema specifico.