

# Modellistica Numerica

Università di Pavia

20 Febbraio 2018 — ore 10.00 — aula C8

Punti totali: 32.

Durata dell'esame: 2 ore.

## Problema 1. Metodi upwind e delle differenze centrate

[13 punti]

Sia  $\epsilon \in \mathbb{R}$  positivo. Consideriamo la discretizzazione del problema al bordo di diffusione-trasporto

$$-\epsilon u'' + u' = 1 \quad \text{in } (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0$$

con il metodo delle differenze finite. Fissiamo  $n$  nodi equispaziati  $x_j = j/(n+1)$ , per  $j = 1, \dots, n$ .

- Scrivere (i) il metodo delle differenze finite centrate e (ii) quello upwind, nel nodo  $x_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ .
- Mostrare che il metodo upwind può essere scritto come il metodo delle differenze centrate per un problema al bordo modificato.
- Scrivere matrice e termine noto per il sistema lineare corrispondente a ciascun metodo.
- Fissiamo  $\epsilon = 1/300$  e supponiamo di aver calcolato l'errore per entrambi i metodi misurandolo come

$$\max_{j=1, \dots, n} |u(x_j) - U_j|,$$

dove  $u$  è la soluzione esatta e  $\vec{U} \in \mathbb{R}^n$  quella discreta, per  $n = 2^1, \dots, 2^{14}$ . Il risultato è mostrato in figura, dove sulle ascisse abbiamo la distanza tra i nodi  $h = 1/(n+1)$ .

Quale dei due grafici (“metodo A” con segni + e linea continua, oppure “metodo B” con segni  $\circ$  e linea tratteggiata) corrisponde al metodo upwind e quale a quello delle differenze centrate?

Giustificare la risposta.

- Elencare almeno un vantaggio di ciascun metodo.

Suggerimento: la figura può aiutare.



