Modellistica Numerica

Università di Pavia

24 luglio 2018 — ore 10.00 — aula E9

Punti totali: 32. Durata dell'esame: 2 ore.

Problema 1. Differenze finite per la derivata terza

[14 punti]

Data una funzione continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ e $h > 0$, consideriamo la seguente differenza finita centrata:

$$D_h^3 f(x) := \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)}{2h^3}. \quad (1)$$

(a) Mostrare che se f è di classe $C^5(\mathbb{R})$, allora $D_h^3 f(x)$ approssima la derivata terza $f'''(x)$ con un errore di ordine $O(h^2)$.

Suggerimento: usare l'espansione di Taylor di $f(x+d)$ di grado sufficientemente elevato.

(b) Mostrare che $D_h^3 f(x)$ si può scrivere come composizione delle differenze finite centrate di ordine uno e due e passo h, cioè $D_h^3 f(x) = D_h^C D_h^{2C} f(x)$.

(c) Mostrare che la seguente combinazione di differenze centrate per la derivata *prima* con passi h e $2h$

$$\frac{1}{h^2} D_{2h}^C f + \frac{h^2 - 1}{h^2} D_h^C f$$

approssima $\frac{1}{2} f''' + f'$ con errore quadratico in h.

Suggerimento: non è necessario usare un'altra volta l'espansione di Taylor, ma è sufficiente usare gli errori di troncamento già noti e quanto dimostrato al punto (a).

(d) Dato $c > 0$, $c \neq 1$, determinare $A > 0$ tale che

$$f'''(x) - \frac{f(x+ch) - cf(x+h) + cf(x-h) - f(x-ch)}{Ah^3} = \mathcal{O}(h^2).$$

(e) Immaginiamo di risolvere numericamente un problema al bordo per un'equazione differenziale (ordinaria, lineare, del terzo ordine) con il metodo delle differenze finite usando l'approssimazione (1) della derivata terza. Otterremo una matrice sparsa? Tridiagonale? Quali elementi della matrice ci aspettiamo siano diversi da zero?

Soluzione: (a) Usando l'espansione di Taylor:

$$f(x+d) = f(x) + df'(x) + \frac{d^2}{2} f''(x) + \frac{d^3}{6} f'''(x) + \frac{d^4}{24} f^{(iv)}(x) + \frac{d^5}{120} f^{(v)}(\xi_d), \qquad d \in \mathbb{R},\ \xi_d \in \begin{cases} (x, x+d) & d > 0 \\ (x-d, x) & d < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) - D_h^3 f(x) &= f'''(x) - \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)}{2h^3} \\ &= f'''(x) - \frac{1}{2h^3}\Big(f(x) + 2hf'(x) + 2h^2 f''(x) + \frac{4}{3} h^3 f'''(x) + \frac{2}{3} h^4 f^{(iv)}(x) + \frac{4}{15} h^5 f^{(v)}(\xi_{2h}) \\ &\qquad - 2f(x) - 2hf'(x) - h^2 f''(x) - \frac{h^3}{3} f'''(x) - \frac{1}{12} h^4 f^{(iv)}(x) - \frac{1}{60} h^5 f^{(v)}(\xi_h) \\ &\qquad + 2f(x) - 2hf'(x) + h^2 f''(x) - \frac{h^3}{3} f'''(x) + \frac{1}{12} h^4 f^{(iv)}(x) - \frac{1}{60} h^5 f^{(v)}(\xi_{-h}) \\ &\qquad - f(x) + 2hf'(x) - 2h^2 f''(x) + \frac{4}{3} h^3 f'''(x) - \frac{2}{3} h^4 f^{(iv)}(x) + \frac{4}{15} h^5 f^{(v)}(\xi_{-2h}) \Big) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{120}h^2\Big(16f^{(v)}(\xi_{2h}) - f^{(v)}(\xi_h) - f^{(v)}(\xi_{-h}) + 16f^{(v)}(\xi_{-2h})\Big) = \mathcal{O}(h^2).$$

(b) $$D_h^C D_h^{2C} f(x) = D_h^C\left(\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2h}\frac{\big(f(x+2h) - f(x)\big) - 2\big(f(x+h) - f(x-h)\big) + \big(f(x) - f(x-2h)\big)}{h^2} = D_h^3 f(x).$$

(c) $$\frac{1}{h^2}D_{2h}^C f + \frac{h^2-1}{h^2}D_h^C f = \frac{1}{h^2}\Big(\frac{f(x+2h) - f(x-2h)}{4h} - \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}\Big) + D_h^C f$$
$$= \frac{1}{2}D_h^3 f + D_h^C f = \frac{1}{2}f''' + f' + \mathcal{O}(h^2).$$

(d) $$f'''(x) - \frac{f(x+ch) - cf(x+h) + cf(x-h) - f(x-ch)}{Ah^3}$$
$$\begin{aligned}
&= f'''(x) - \frac{1}{Ah^3}\bigg(f(x) + chf'(x) + \frac{c^2}{2}h^2f''(x) + \frac{c^3}{6}h^3f'''(x) + \frac{c^4}{24}h^4f^{(iv)}(x)\\
&\qquad - cf(x) - chf'(x) - \frac{c}{2}h^2f''(x) - \frac{c}{6}h^3f'''(x) - \frac{c}{24}h^4f^{(iv)}(x)\\
&\qquad + cf(x) - chf'(x) + \frac{c}{2}h^2f''(x) - \frac{c}{6}h^3f'''(x) + \frac{c}{24}h^4f^{(iv)}(x)\\
&\qquad - f(x) + chf'(x) - \frac{c^2}{2}h^2f''(x) + \frac{c^3}{6}h^3f'''(x) - \frac{c^4}{24}h^4f^{(iv)}(x) + \mathcal{O}(h^5)\bigg)\\
&= f'''(x) - \frac{1}{Ah^3}\Big(\frac{c^3-c}{3}h^3f'''(x) + \mathcal{O}(h^5)\Big),
\end{aligned}$$

e se $A = \frac{c^3-c}{3}$ allora questa differenza è uguale a $\mathcal{O}(h^2)$.

(e) La differenza finita (1) lega il valore in un nodo con quello nei due nodi precedenti e con quello nei due nodi successivi. Quindi ci aspettiamo di ottenere una matrice pentadiagonale (sparsa ma non tridiagonale).

Problema 2. Metodi di collocazione e Galerkin con basi trigonometriche

[18 punti]

Consideriamo il problema al bordo di Dirichlet

$$-u''(x) + q(x)u(x) = f(x) \quad x \in (0,\pi), \qquad u(0) = u(\pi) = 0, \tag{2}$$

dove $q, f \in C^0([0,\pi])$, $q \geq 0$. Vogliamo approssimare u con un elemento u_n dello spazio discreto

$$V_n := \operatorname{span}\left\{\varphi_k(x) := \sin(kx),\ k = 1,\ldots,n\right\}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

(a) Dati n nodi $0 < x_1 < \cdots < x_n < \pi$, definire il metodo di collocazione per V_n ed il problema (2).

(b) Scrivere il sistema lineare $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^C \vec{\mathbf{U}}^C = \vec{\mathbf{F}}^C$ risultante, per V_n come in (3).

(c) Scrivere il problema al bordo (2) in forma debole per uno spazio funzionale V opportuno.

(d) Definire il metodo di Galerkin per il problema (2) e lo spazio V_n.

(e) Scrivere il sistema lineare $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^G \vec{\mathbf{U}}^G = \vec{\mathbf{F}}^G$ corrispondente (per V_n come in (3)).

(f) Per $0 \leq q \in C^0([0,\pi])$ generica, dire se le matrici $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^C$ e $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^G$ sono sparse, simmetriche, definite positive.

(g) Elencare almeno un vantaggio per il metodo di collocazione ed uno per quello di Galerkin.

(h) Assumiamo esista una successione reale $\hat{u}_k$ tale che la soluzione u di (2) si possa scrivere come $u = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k \varphi_k$, dove la convergenza vale in $H^1(0,\pi)$ (cioè $\lim_{n\to\infty} \|u - \sum_{k=1}^{n} \hat{u}_k\varphi_k\|_{H^1(0,\pi)} = 0$).

Dimostrare che la successione delle soluzioni $\{u_n^G \in V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ del metodo di Galerkin converge a u, cioè soddisfa $\lim_{n\to\infty} \|u - u_n\|_{H^1(0,\pi)} = 0$.

Suggerimento: ricordare uno dei principali risultati teorici relativi al metodo di Galerkin.

(i) Fissiamo $q(x) \equiv 1$ e $x_j = j\pi/(n+1)$.

Quale dei seguenti comandi Matlab (`1-5`) genera la matrice $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^C$ e quale genera $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^G$?

Giustificare la risposta.

Si può usare il fatto che $\int_0^\pi \sin(kx)\sin(jx)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \cos(kx)\cos(jx)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\delta_{j,k}$.

```
1 A = cos((1:n)'*(1:n)*pi/(n+1)) + sin((1:n)'*(1:n)*pi/(n+1));
2 A = sin((1:n)'*(1:n)*pi/(n+1)) * diag((1:n).^2+1);
3 A = (pi/2) * diag((1:n).^2+1);
4 A = pi * eye(n);
5 A = cos((1:n)'*pi/(n+1)) * cos((1:n)*pi/(n+1)) + sin((1:n)'*pi/(n+1))
    * sin((1:n)*pi/(n+1));
```

Soluzione:

(f) Nel metodo di collocazione cerchiamo $u_n \in V_n$ tale che $-u_n''(x_j) + q(x_j)u_n(x_j) = f(x_j)$ per $j = 1,\ldots,n$.

(g) Scrivendo $u_n = \sum_{j=1}^{n} U_j^C \varphi_j \in V_n$, il sistema lineare $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^C \vec{\mathbf{U}}^C = \vec{\mathbf{F}}^C$ è determinato dalla matrice e dal vettore

$$A_{j,k}^C = -\varphi_k''(x_j) + q(x_j)\varphi_k(x_j) = \big(k^2 + q(x_j)\big)\sin(kx_j), \qquad F_j^C = f(x_j).$$

(h) La forma debole è: trovare $u \in H_0^1(0,\pi)$ tale che $\displaystyle\int_0^\pi (u'w' + quw)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi fw\,\mathrm{d}x \quad \forall w \in V = H_0^1(0,\pi)$.

(i) Il metodo di Galerkin è: trovare $u_n \in V_n$ tale che $\displaystyle\int_0^\pi (u_n'w_n' + qu_nw_n)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi fw_n\,\mathrm{d}x\ \forall w_n \in V_n$.

(j) Scrivendo $u_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} U_j^G\varphi_j$, il sistema lineare è dato dalla matrice e dal vettore

$$\begin{aligned}
A_{j,k}^G &= \int_0^\pi (\varphi_k'\varphi_j' + q\varphi_k\varphi_j)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \big(kj\cos(kx)\cos(jx) + q(x)\sin(kx)\sin(jx)\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{2}kj\delta_{k,j} + \int_0^\pi q(x)\sin(kx)\sin(jx)\,\mathrm{d}x, \\
F_j^G &= \int_0^\pi f\varphi_j\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi f(x)\sin(jx)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

(k) In generale nessuna delle matrici coinvolte è sparsa. (Notare che il supporto degli elementi φ_j della base è l'intero dominio $[0,\pi]$, al contrario di quanto accade nel metodo degli elementi finiti.)

Solo $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^G$ è simmetrica, per definizione, e definita positiva, grazie al lemma di Céa.

(l) Il metodo di Galerkin è ben posto, stabile, quasi-ottimale, fornisce matrici simmetriche e definite positive. Inoltre permette un'analisi dell'errore molto semplice.

Il metodo di collocazione non richiede formule di quadratura, quindi è più semplice da implementare.

(m) Usando il Lemma di Céa e scegliendo $w_n = \sum_{k=1}^n \hat{u}_k\varphi_k$, per la convergenza della serie abbiamo

$$\|u-u_n\|_{H^1(0,\pi)} \le C_{qo} \inf_{v_n\in V_n} \|u-v_n\|_{H^1(0,\pi)} \le C_{qo}\,\|u-w_n\|_{H^1(0,\pi)} = C_{qo}\left\|u-\sum_{k=1}^n \hat{u}_k\varphi_k\right\|_{H^1(0,\pi)} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

(n) Con questa scelta di q e x_j abbiamo $A^C_{j,k} = (k^2+1)\sin(\frac{kj\pi}{n+1})$ quindi $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^C$ è il prodotto tra la matrice (densa) con elementi $\sin(\frac{kj\pi}{n+1})$ e la matrice diagonale con termini $D_{k,k} = 1+k^2$.

Con $q=1$ la matrice del metodo di Galerkin è diagonale:

$$A^G_{j,k} = \int_0^\pi \big(kj\cos(kx)\cos(jx) + \sin(kx)\sin(jx)\big)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}(k^2+1)\delta_{j,k}.$$

Quindi le matrici del metodo di collocazione e di Galerkin sono generate con i comandi:

```
A_col = sin((1:n)'*(1:n)*pi/(n+1)) * diag((1:n).^2+1);
A_Gal = (pi/2) * diag((1:n).^2+1);
```

Gli abbinamenti sono collocazione–riga 2, Galerkin–riga 3.