Modellistica Numerica

Università di Pavia

12 febbraio 2019 — ore 10:00 — aula E10

Punti totali: 33 Durata dell'esame: 2 ore.

Problema 1. Confronto tra metodi numerici [7 punti]

Dati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $f, q \in C^0([-1,1])$, il problema al bordo di Dirichlet

$$-u'' + qu = f \quad \text{in } (-1,1), \qquad u(-1) = \alpha, \quad u(1) = \beta$$

può essere approssimato con diversi metodi numerici, ad esempio (i) quello delle differenze finite, (ii) il metodo di collocazione spettrale polinomiale e (iii) il metodo degli elementi finiti lineari. Tutti questi metodi richiedono la soluzione di un sistema lineare di equazioni $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\vec{\mathbf{U}} = \vec{\mathbf{b}}$. Elencare:

(a) un vantaggio del metodo delle differenze finite rispetto a quello di collocazione spettrale;

(b) un vantaggio del metodo di collocazione spettrale rispetto a quello degli elementi finiti;

(c) un vantaggio del metodo degli elementi finiti rispetto a quello delle differenze finite.

Per ciascuno dei tre metodi, cosa rappresenta la k-esima componente del vettore soluzione $\vec{\mathbf{U}}$?

Indicare almeno una situazione in cui la matrice $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ ottenuta è simmetrica e definita positiva. Attenzione: può essere necessario fare delle ipotesi sul problema al bordo.

Problema 2. Metodo upwind [20 punti]

Consideriamo il seguente problema di trasporto–diffusione:

$$-u'' + pu' = f \quad \text{in } (0,1), \qquad u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta, \tag{1}$$

con $p, f \in C^0([0,1])$ e $p \geq 0$. Fissiamo i nodi $x_j = jh$ per $h = \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ e $j = 1, \ldots, n$.

(a) Scrivere il metodo delle differenze finite <u>upwind</u> sui nodi x_j per il problema (1). (Ricordare che $p \geq 0$.)

(b) Scrivere il metodo in forma matriciale $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\vec{\mathbf{U}} = \vec{\mathbf{b}}$.

(c) Dimostrare il seguente principio del massimo discreto "pesato".

Dati $n \in \mathbb{N}$, $V_0, \ldots, V_{n+1} \in \mathbb{R}$, $a_1, \ldots, a_n > 0$, $c_1, \ldots, c_n > 0$:

$$-a_j V_{j+1} + (a_j + c_j)V_j - c_j V_{j-1} \leq 0 \quad \text{per } 1 \leq j \leq n, \quad V_0 \leq 0, \quad V_{n+1} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad V_j \leq 0 \quad \text{per } 1 \leq j \leq n.$$

Suggerimento: adattare la dimostrazione del principio del massimo discreto, usando medie pesate.

(d) Dare la definizione di matrice monotona.

(e) Dimostare che la matrice $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ del metodo upwind è monotona.

Suggerimento: usare il principio del massimo discreto pesato.

(f) La matrice $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ è a predominanza diagonale? A predominanza diagonale stretta?

(g) Mostrare che il metodo upwind può essere scritto come un metodo alle differenze finite <u>centrate</u> per un opportuna "viscosità numerica".

(h) Verificare che il numero di Péclet locale Pe_h del metodo alle differenze centrate ottenuto è minore di 1.

(i) Se p ed f sono liscie, qual è l'ordine di convergenza in h atteso per il metodo upwind?

Problema 3. Codice da completare: collocazione [6 punti]

Vogliamo approssimare la soluzione u del problema al bordo periodico

$$-u''(x) + (\cos^2 x)u(x) = \sin x\, \mathrm{e}^{\sin x} \qquad x \in (0, 2\pi), \qquad u(0) = u(2\pi), \quad u'(0) = u'(2\pi)$$

con il metodo di collocazione trigonometrica, usando come funzioni di base ψ_k e come nodi x_j

$$\psi_k(x) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-\frac{n}{2}-1)x}, \qquad x_j := \frac{2\pi}{n}(j-1), \qquad j, k = 1, \dots, n,$$

dove $n \in \mathbb{N}$ è un numero pari.

Completare il seguente codice Matlab che approssima u e ne disegna il grafico.

```
n     = 20;
f_fun = @(x) sin(x).*exp(sin(x));
q_fun = @(x)  [ (1) ]

x     = 2*pi*(0:n-1)/n;          % Vettore riga
q_v   = q_fun(x);
A     = zeros(n,n);
for j = 1:n
    for k = 1:n
        A(j,k) =  [ (2) ]
    end
end
B =  [ (3) ]
U = A\B;

xplot = linspace(0,2*pi,500);     % Vettore riga
uplot =  [ (4) ]
plot(xplot, real(uplot));
```