Modellistica Numerica

Università di Pavia

26 febbraio 2019 — ore 10:00 — aula E10

Punti totali: 33 Durata dell'esame: 2 ore.

Problema 1. Differenze finite per un problema ellittico [16 punti]

(a) Siano $x \in \mathbb{R}$, $h > 0$ e sia f una funzione reale sufficientemente liscia. Mostrare che la differenza finita centrata $D_h^{2C} f(x) = \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$ approssima $f''(x)$ con ordine quadratico in h.

(b) Sia g una seconda funzione reale sufficientemente liscia. Mostrare che la differenza finita

$$D_{h,g} f(x) := \frac{g(x+\frac{h}{2})f(x+h) - [g(x+\frac{h}{2}) + g(x-\frac{h}{2})]f(x) + g(x-\frac{h}{2})f(x-h)}{h^2} \tag{1}$$

approssima la derivata del prodotto $(gf')'(x)$ con ordine quadratico in h.

Suggerimento: scrivere l'espansione di Taylor di g per un passo opportuno e combinarla con quella di f. Nell'espansione di $D_{h,g}f(x)$ ignorare i termini di grado sufficientemente alto.

(c) Dato un intervallo (a, b), fissare i nodi equispaziati $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b$ per $n \in \mathbb{N}$, con $h := x_j - x_{j-1} = \frac{b-a}{n+1}$.

Usare (1) per scrivere un metodo alle differenze finite sui nodi x_j per l'approssimazione del problema al bordo

$$-(Pu')' + qu = f \quad \text{in } (a, b), \qquad u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta,$$

dove $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $q \geq 0, P > 0, f$ sono tre funzioni reali sufficientemente lisce in $[a, b]$.

Ricordando (1), fare attenzione alla scelta dei punti in cui è valutata P.

(d) Scrivere matrice e termine noto del sistema lineare $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{b}}$ ottenuto.

Verificare che se $P \equiv 1$ il sistema lineare si riduce a quello già noto per $-u'' + qu = f$.

(e) Stabilire se la matrice $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ è sparsa, tridiagonale, simmetrica, a predominanza diagonale, a predominanza diagonale stretta, o quali ipotesi ulteriori sono necessarie per garantire queste proprietà.

Problema 2. Codice da completare: differenze finite [5 punti]

Completare il seguente codice Matlab per l'approssimazione del problema di Dirichlet

$$-u''(x) + \frac{1}{(1+x)^2} u(x) = -\frac{1}{(1+x)^3} \qquad x \in (0,1), \qquad u(0) = 1, \quad u(1) = \frac{1}{2}$$

con il metodo delle differenze finite.

```
n     = 50;
a     = 0;
b     = 1;
alfa  = 1;
beta  = 0.5;
f_fun = @(x) -(1+x).^(-3);
q_fun = @(x)  (1+x).^(-2);

h   = [            (1)            ]
xx  = [            (2)            ]
x   = xx(2:end-1);
q_v = q_fun(x)';
f_v = f_fun(x)';
M   = [            (3)            ]
A   = spdiags( M, [-1,0,1], n,n );
B   = [            (4)            ]
U   = A\B;
plot( xx, [            (5)            ] );
```

Problema 3. Equazione del calore con condizioni di Neumann [12 punti]

Considerare il problema ai valori iniziali per l'equazione del calore con condizioni al bordo di <u>Neumann</u>:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{in } (0,1) \times (0,T) \\ u(x,0) = u^0(x) & x \in (0,1), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 & t \in (0,T), \end{cases}$$

dove $T > 0$ e $u^0 \in C^0([0,1])$ sono dati.

(a) Assumiamo che la soluzione sia separabile, cioè possa essere scritta come prodotto di due funzioni di una sola variabile: $u(x,t) = \mathsf{X}(x)\mathsf{T}(t)$. Derivare l'espressione di u.

(b) Esistono soluzioni di questo problema ai valori iniziali che <u>non</u> decadono a 0 per $t \to \infty$ $(T = \infty)$? Giustificare la risposta.

(c) Ripetere il punto (a) per il problema con condizioni al bordo miste, cioè Dirichlet a sinistra $(x = 0)$ e Neumann a destra $(x = 1)$:

$$u(0,t) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 \qquad t \in (0,T).$$

Suggerimento: provare a disegnare il grafico delle possibili funzioni $\mathsf{X}(x)$ può essere d'aiuto.