Modellistica Numerica

Università di Pavia

2 luglio 2019 — ore 10:00 — aula E9

Punti totali: 33 Durata dell'esame: 2 ore.

Problema 1. Differenze finite per il problema periodico [20 punti]

Consideriamo l'equazione di diffusione–reazione con condizioni al bordo periodiche:

$$-u'' + qu = f \text{ in } (a,b), \qquad u(a) = u(b), \quad u'(a) = u'(b) \tag{1}$$

dove $(a,b) \subset \mathbb{R}$, $q, f \in C^0([a,b])$. Assumiamo che $q^* := \min_{x\in[a,b]} q(x) > 0$.

Dato $n \in \mathbb{N}$, definiamo $h := \frac{b-a}{n+1}$ e fissiamo i nodi equispaziati $x_j := a + jh$, per $j = 0, \dots, n+1$.

(a) Scrivere il sistema lineare $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\vec{\mathbf{U}} = \vec{\mathbf{f}}$ corrispondente al metodo delle differenze finite centrate per il problema al bordo (1).

Attenzione: la matrice $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ non è tridiagonale.

(b) Mostrare che la matrice del metodo delle differenze finite è invertibile.

Suggerimento: dimostrare che $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ appartiene ad una classe di matrici descritte a lezione.

(c) Dimostrare che tutti gli autovalori di $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ sono reali, positivi e maggiori o uguali a q_*.

Suggerimento: usare il teorema dei cerchi di Gershgorin.

(d) Dedurre una maggiorazione per la norma dell'inversa $\left\|\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}\right\|_2$.

Suggerimento: ricordare la relazione tra la norma di una matrice simmetrica ed i suoi autovalori.

(e) Assumiamo che la soluzione u del problema (1) sia di classe C^4. Definire il vettore $\vec{\mathbf{T}}$ dell'errore di troncamento e stimare la sua dipendenza dal passo h.

(f) Dedurre dai passi precedenti una stima dell'errore $|u(x_j) - U_j|$ del metodo delle differenze finite.

Misurare l'errore in una norma vettoriale opportuna.

(g) Scrivere $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ come somma di due matrici $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\underline{\mathbf{T}}} + \underline{\underline{\mathbf{P}}}$, dove $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ è tridiagonale e $\underline{\underline{\mathbf{P}}}$ ha rango uno.

Cosa implica questo fatto per la risoluzione del sistema lineare corrispondente?

(h) Usare il metodo dell'energia per dimostrare che il problema al bordo (1) ammette al più una soluzione $u \in C^2([a,b])$.

Problema 2. Metodo di shooting [13 punti]

(a) Descrivere brevemente il metodo di *shooting* per il problema al bordo non lineare

$$u''(x) = F\big(x, u(x), u'(x)\big) \quad x \in (a, b), \qquad u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta.$$

(b) Fissiamo $p, q, r \in C^0([a, b])$ con $q \geq 0$. Consideriamo il problema lineare

$$u''(x) = p(x)u'(x) + q(x)u(x) + r(x) \quad x \in (a, b), \qquad u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta.$$

Scrivere una iterazione del metodo di shooting accoppiato con il metodo di *Newton*, scegliendo come primo valore del dato iniziale $u_1'(a) = s_1 = 0$.

Assumendo che il problema ai valori iniziali corrispondente venga risolto esattamente, mostrare che una sola iterazione del metodo di Newton permette di trovare il valore esatto di $u'(a)$.

(c) Calcolare due iterazioni del metodo di shooting combinato al metodo di *bisezione* applicato al problema

$$u''(x) = 2\frac{\big(u'(x)\big)^2}{u(x)} \quad x \in (0, 1), \qquad u(0) = 1, \quad u(1) = \frac{1}{10}.$$

Come valori iniziali per $u'(0)$ scegliere $s_0 = -20$ e $s_1 = 0$.

Al posto della risoluzione numerica dei problemi ai valori iniziali, usare il fatto che la soluzione del problema ai valori iniziali per l'equazione differenziale considerata con $u(0) = 1$ e $u'(0) = -C$ è $u(x) = 1/(1 + Cx)$, per qualsiasi $C \geq 0$.