Modellistica Numerica

Università di Pavia

30 gennaio 2020 — ore 10:00 — aula E9

Punti totali: 33 Durata dell'esame: 2 ore.

Problema 1. Differenze finite di ordine 3 per la derivata prima [11 punti]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione liscia, $x \in \mathbb{R}$, $h > 0$.

(a) Mostrare che la differenza finita centrata $D_h^C f(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ approssima $f'(x)$ con un errore quadratico $\mathcal{O}(h^2)$ per $h \to 0$.

(b) Calcolare $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ tali che

$$D_h^{\triangle} f(x) := \frac{1}{h}\Big(Af(x+h) + Bf(x) + Cf(x-h) + Df(x-2h)\Big)$$

approssimi $f'(x)$ con errore $\mathcal{O}(h^3)$.

Suggerimento: scrivere $D_h^{\triangle} f(x)$ come somma di espansioni di Taylor di ordine opportuno e scegliere i coefficienti in modo da cancellare i termini indesiderati.

(c) Verificare la correttezza della formula ottenuta controllando che fornisca il valore esatto di $f'(0)$ per $f(x) = x^2$ e $f(x) = x^3$.

Perché sappiamo che per questi polinomi $D_h^{\triangle} f$ è esatta?

Problema 2. Problema non lineare [11 punti]

(a) Consideriamo il problema al bordo non lineare

$$\begin{aligned} u''(x) &= F\big(u(x)\big) \qquad x \in (0,1), \\ u(0) &= \alpha, \\ u(1) &= \beta \end{aligned}$$

dove $F \in C^1(\mathbb{R})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sono dati. Descrivere come si può approssimare la soluzione u usando il metodo delle differenze finite insieme al metodo di Newton. Usare i nodi equispaziati $x_j = hj$, $h = \frac{1}{n+1}$, $j = 0, \ldots, n+1$. Scrivere l'espressione di vettori e matrici coinvolti.

(b) Assumiamo che il problema al bordo ammetta una soluzione u liscia. Definire e stimare l'errore di troncamento commesso dal metodo. Qual è l'ordine di convergenza del troncamento rispetto ad h?

(c) Dare una condizione sufficiente sulla funzione non lineare F che garantisca che tutti i sistemi lineari necessari per il metodo di Newton siano invertibili, indipendentemente dalla scelta di n e del vettore iniziale.

Suggerimento: sfruttare le proprietà delle matrici definite positive o negative.

Problema 3. Perturbazione di rango uno di un sistema lineare [11 punti]

Sia $\underline{\underline{\mathbf{M}}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matrice invertibile data. Immaginiamo di avere a disposizione una funzione Matlab `a = FastSolve(b)` che risolve il sistema lineare $\underline{\underline{\mathbf{M}}}\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{b}}$ con complessità computazionale $O(n)$, dato un qualsiasi vettore $\vec{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^n$.

Vogliamo risolvere il sistema perturbato $(\underline{\underline{\mathbf{M}}} + \vec{\mathbf{u}}\vec{\mathbf{w}}^\top)\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{y}}$ dove $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{w}}, \vec{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n$ sono vettori dati (intesi come vettori colonna) e $^\top$ indica il trasposto. Ricordiamo che la soluzione $\vec{\mathbf{x}}$ è data dalla formula

$$\vec{\mathbf{x}} = \left(\underline{\underline{\mathbf{I}}} - \frac{(\underline{\underline{\mathbf{M}}}^{-1}\vec{\mathbf{u}})\vec{\mathbf{w}}^\top}{1 + \vec{\mathbf{w}}^\top(\underline{\underline{\mathbf{M}}}^{-1}\vec{\mathbf{u}})}\right)(\underline{\underline{\mathbf{M}}}^{-1}\vec{\mathbf{y}}) \qquad (1)$$

dove $\underline{\underline{\mathbf{I}}}$ è la matrice identità. Applichiamo questa formula usando il seguente comando Matlab

```
x = (eye(n) - FastSolve(u)*w' / (1 + w'*FastSolve(u))) * FastSolve(y);
```

dove `y,u,w` sono vettori colonna di lunghezza `n`. (Ricordiamo che `eye(n)` è la matrice identità $n \times n$.)

(a) Questo codice fornisce il vettore `x` corretto ma non è soddisfacente per n grande: perché?

Qual è la complessità computazionale in n di questa funzione?

E la quantità di memoria necessaria (come potenza di n)?

Giustificare le risposte.

(b) Scrivere una breve funzione Matlab che calcoli la soluzione $\vec{\mathbf{x}}$ di $(\underline{\underline{\mathbf{M}}} + \vec{\mathbf{u}}\vec{\mathbf{w}}^\top)\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{y}}$ con la complessità desiderata, sfruttando `FastSolve` e usando la formula (1).

Suggerimento: manipolare (1) in modo da ottenere un'espressione più utile. Usare le proprietà dei prodotti matriciali in modo furbo.

(c) Dimostrare che il vettore $\vec{\mathbf{x}}$ definito da (1) è soluzione del sistema lineare $(\underline{\underline{\mathbf{M}}} + \vec{\mathbf{u}}\vec{\mathbf{w}}^\top)\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{y}}$.

Suggerimento: definire i vettori ausiliari $\vec{\mathbf{p}}$ e $\vec{\mathbf{q}}$ come le soluzioni dei sistemi lineari $\underline{\underline{\mathbf{M}}}\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{y}}$ e $\underline{\underline{\mathbf{M}}}\vec{\mathbf{q}} = \vec{\mathbf{u}}$.

(d) Descrivere un esempio di situazione in cui l'uso del metodo in (1) può essere computazionalmente conveniente.