Modellistica Numerica

Università di Pavia

18 febbraio 2020 — ore 10:00 — aula E9

Punti totali: 34 Durata dell'esame: 2 ore.

Problema 1. Equazione ellittica a coefficienti variabili [17 punti]

Consideriamo il problema al bordo

$$-\left(\mathrm{e}^{-x^2} u'(x)\right)' = x^3 \qquad x \in (-1,1), \qquad u(-1) = u(1) = 0. \tag{1}$$

(a) Derivare una formulazione debole del problema (1).

(b) Scrivere il problema in forma variazionale astratta.

La forma bilineare ottenuta è simmetrica?

(c) Mostrare che questo problema variazionale soddisfa le tre ipotesi del teorema di Lax–Milgram.

Quali conseguenze per il problema al bordo se ne possono dedurre?

(d) Derivare una maggiorazione (stima di stabilità) della soluzione u, misurata in una norma appropriata.

(e) Consideriamo il metodo degli elementi finiti lineari per questo problema, usando una griglia di nodi equispaziati.

Descrivere gli elementi della matrice $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ e del termine noto $\vec{\mathbf{F}}$ del sistema lineare corrispondente.

È possibile calcolare gli elementi di $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ esattamente?

La matrice ottenuta è sparsa?

Problema 2. DFT & FFT [17 punti]

(a) Dare la definizione della trasformata di Fourier discreta (DFT_n) in $\mathbb{C}^n$.

(b) Calcolare $DFT_4(\vec{\mathbf{z}})$ per il vettore $\vec{\mathbf{z}} = (1000, 100, 10, 1)^\top$.

(c) Per $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$, $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{C}^n$, definiamo

$$\vec{\mathbf{x}}^{\text{dispari}} := (x_1, x_3, \cdots, x_{n-1})^\top \in \mathbb{C}^m, \qquad \vec{\mathbf{x}}^{\text{pari}} := (x_2, x_4, \cdots, x_n)^\top \in \mathbb{C}^m.$$

Dimostrare che, per $j = 1, \ldots, n$,

$$\big(DFT_n(\vec{\mathbf{x}})\big)_j = \big(DFT_m(\vec{\mathbf{x}}^{\text{dispari}})\big)_j + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}(j-1)}\big(DFT_m(\vec{\mathbf{x}}^{\text{pari}})\big)_j. \tag{2}$$

Qui assumiamo di indicizzare gli elementi dei vettori $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{C}^m$ (in particolare $\vec{\mathbf{v}} = DFT_m(\vec{\mathbf{x}}^{\text{dispari}})$ e $\vec{\mathbf{v}} = DFT_m(\vec{\mathbf{x}}^{\text{pari}})$) con indici periodici: $\vec{\mathbf{v}}_{m+j} = \vec{\mathbf{v}}_j$.

(d) Spiegare brevemente come usare la formula (2) per calcolare la trasformata di Fourier veloce (FFT) di un vettore in $\mathbb{C}^n$ con $n = 2^N$.

Qual è il costo computazionale della FFT, in funzione della dimensione n?

(e) Come nel punto (b), calcolare ancora $DFT_4(\vec{\mathbf{z}})$, questa volta usando la formula (2) in modo ricorsivo.

(f) Completare il seguente codice Matlab che calcola la FFT in $\mathbb{C}^{2^N}$ in modo ricorsivo.

Assumere che il vettore di input `y` è un vettore colonna la cui lunghezza è una potenza di 2.

```
function Y = fft_ricorsiva(y)
n = length (y);
if n == 1
   [          (I)          ]
else
   Ydisp = fft_ricorsiva(y(1:2:n));
   Ypari = fft_ricorsiva(y(2:2:n));
   [          (II)         ]
end
end
```