Modellistica Numerica

Università di Pavia

22.02.2022 — ore 10:00 — aula E10

Punti totali: 32 Durata dell'esame: 2 ore.

Problema 1. Elementi finiti lineari per un problema di Dirichlet [18 punti]

Consideriamo il seguente problema di Dirichlet

$$-u''(x) + 4u(x) = 8 \quad x \in (0,1), \qquad u(0) = u(1) = 0. \tag{1}$$

(a) Scrivere la formulazione debole del problema (1) come problema variazionale astratto.

(b) Definire lo spazio n-dimensionale V_h degli elementi finiti lineari su una griglia uniforme. Definire una sua base.

(c) Scrivere il metodo degli elementi finiti lineari per il problema (1) in forma variazionale. Derivare la forma matriciale

(d) Sia u_h la soluzione ottenuta con il metodo degli elementi finiti. Sia $w_h \in H_0^1(0,1)$ una funzione affine su ciascun elemento $[x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \ldots, n+1$.

Dimostrare che $\|u - u_h\|_{H^1(0,1)} \leq 4 \|u - w_h\|_{H^1(0,1)}$.

(e) Detta $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice degli elementi finiti lineari, dimostrare che $\left\|\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}\right\|_2 \leq \frac{1}{4}(n+1)$.

Suggerimento: usare il teorema dei cerchi di Gershgorin e le proprietà della matrice.

(f) Calcolare esplicitamente matrice e termine noto del metodo per la griglia di ampiezza $h = \frac{1}{4}$.

Problema 2. Problema con condizioni al bordo miste [14 punti]

Consideriamo il problema al bordo con condizioni al bordo miste:

$$-u''(x) + q(x)u(x) = f(x) \quad x \in (a,b), \qquad u(a) = \alpha, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(b) = \beta. \tag{2}$$

Qui $(a,b) \subset \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $q, f \in C^0([a,b])$, $q \geq 0$.

Per $n \in \mathbb{N}$, fissiamo i nodi equispaziati $x_j = a + hj$, $h = \frac{b-a}{n+1}$, $j = 0, \ldots, n+1$.

(a) Scrivere un metodo alle differenze finite che approssima u sui nodi x_j.

Trattare la condizione al bordo di Neumann in modo da garantire un errore di troncamento quadratico.

Prestare attenzione a qual è la corretta dimensione del sistema lineare.

Scrivere il metodo in forma matriciale $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\vec{\mathbf{U}} = \vec{\mathbf{B}}$.

(b) Mostrare che la matrice $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ ottenuta è a predominanza diagonale.

Formulare un'ipotesi sul problema al bordo che garantisca la predominanza diagonale stretta per qualsiasi n.

(c) Mostrare che per $q = 0$ la matrice $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ è invertibile.

Suggerimento: assumere che $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{0}}$ per un vettore $\vec{\mathbf{v}}$ e osservare le relazioni tra i coefficienti v_j.