Modellistica Numerica

Università di Pavia

22.02.2022 — ore 10:00 — aula E10

Punti totali: 32 Durata dell'esame: 2 ore.

Problema 1. Elementi finiti lineari per un problema di Dirichlet [18 punti]

Consideriamo il seguente problema di Dirichlet

$$-u''(x) + 4u(x) = 8 \quad x \in (0,1), \qquad u(0) = u(1) = 0. \tag{1}$$

(a) Scrivere la formulazione debole del problema (1) come problema variazionale astratto.

(b) Definire lo spazio n-dimensionale V_h degli elementi finiti lineari su una griglia uniforme. Definire una sua base.

(c) Scrivere il metodo degli elementi finiti lineari per il problema (1) in forma variazionale. Derivare la forma matriciale

(d) Sia u_h la soluzione ottenuta con il metodo degli elementi finiti. Sia $w_h \in H_0^1(0,1)$ una funzione affine su ciascun elemento $[x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \dots, n+1$.

Dimostrare che $\|u - u_h\|_{H^1(0,1)} \le 4 \|u - w_h\|_{H^1(0,1)}$.

(e) Detta $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice degli elementi finiti lineari, dimostrare che $\left\|\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}\right\|_2 \le \frac{1}{4}(n+1)$.

Suggerimento: usare il teorema dei cerchi di Gershgorin e le proprietà della matrice.

(f) Calcolare esplicitamente matrice e termine noto del metodo per la griglia di ampiezza $h = \frac{1}{4}$.

Soluzione: (a) Moltiplicando per $w \in H_0^1(0,1)$ e integrando per parti abbiamo la forma variazionale

$$\text{cerchiamo } u \in H_0^1(0,1) \text{ tale che} \qquad \int_0^1 (u'w' + 4uw)\,\mathrm{d}x = 8\int_0^1 w\,\mathrm{d}x \qquad \forall w \in H_0^1(0,1).$$

La forma variazionale astratta è:

$$\text{cerchiamo } u \in V \text{ tale che } \mathcal{A}(u,w) = \mathcal{F}(w) \quad \forall w \in V,$$

$$\text{dove } V := H_0^1(0,1), \quad \mathcal{A}(u,w) := \int_0^1 (u'w' + 4uw)\,\mathrm{d}x, \quad \mathcal{F}(w) := 8\int_0^1 w\,\mathrm{d}x.$$

(b) Fissiamo una griglia di nodi equispaziati $x_j = \frac{j}{h}$, $j = 0, \dots, n+1$, $h = \frac{1}{n+1}$. Lo spazio V_h degli elementi finiti lineari associato è lo spazio delle funzioni continue, affini su ciascun elemento $[x_{j-1}, x_j]$ e nulle in 0 e 1.

Una base di V_h è composta dalle funzioni $\varphi_j \in V_h$, $j = 1, \dots, n$, tali che $\varphi_k(x_j) = \delta_{j,k}$ per $j, k \in \{1, \dots, n\}$.

(c) Il metodo degli elementi finiti consiste nel calcolare

$$u_h \in V_h \text{ tale che} \qquad \int_0^1 (u_h'w_h' + 4u_h w_h)\,\mathrm{d}x = 8\int_0^1 w_h\,\mathrm{d}x \qquad \forall w_h \in V_h.$$

Possiamo espandere la soluzione rispetto alla base scelta come $u_h = \sum_{k=1}^n U_k \varphi_k$, dove $\vec{\mathbf{U}} = (U_1, \dots, U_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ è soluzione del sistema lineare $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\vec{\mathbf{U}} = \vec{\mathbf{F}}$ con $A_{j,k} = \mathcal{A}(\varphi_k, \varphi_j)$, $F_j = \mathcal{F}(\varphi_j) = 8\int_0^1 \varphi_j\,\mathrm{d}x = 8h$ (il grafico di φ_h è un triangolo di base $2h$ e altezza 1). Avremo

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{h} + \frac{8h}{3} & -\frac{1}{h} + \frac{2h}{3} & & \\ -\frac{1}{h} + \frac{2h}{3} & \frac{2}{h} + \frac{8h}{3} & -\frac{1}{h} + \frac{2h}{3} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -\frac{1}{h} + \frac{2h}{3} & \frac{2}{h} + \frac{8h}{3} \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} 8h \\ 8h \\ \vdots \\ 8h \end{pmatrix}$$

I valori di $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ si calcolano facilmente sfruttando l'uniformità della griglia, la simmetria delle funzioni a tenda, ricordando che $\varphi_j' = \pm\frac{1}{h}$ sul suo supporto, e riconducendo tutti gli integrali su elementi a integrali su $(0,h)$:

$$\int_0^1 (\varphi_j')^2\,\mathrm{d}x = 2\int_0^h \frac{1}{h^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{h}, \qquad \int_0^1 \varphi_j'\varphi_{j+1}'\,\mathrm{d}x = -\int_0^h \frac{1}{h^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{h},$$

$$\int_0^1 \varphi_j^2\,\mathrm{d}x = 2\int_0^h \Big(\frac{x}{h}\Big)^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}h, \qquad \int_0^1 \varphi_j\varphi_{j+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^h \Big(\frac{x}{h}\Big)\Big(1-\frac{x}{h}\Big)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{6}.$$

(d) Valgono le ipotesi del teorema di Lax–Milgram:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}(w)| &= 8\left|\int_0^1 w\,\mathrm{d}x\right| \le 8\,\|1\|_{L^2(0,1)}\,\|w\|_{L^2(0,1)} = 8\,\|w\|_{L^2(0,1)}\,,\\
|\mathcal{A}(u,w)| &= \left|\int_0^1 (u'w' + 4uw)\,\mathrm{d}x\right|\\
&\le \|u'\|_{L^2(0,1)}\,\|w'\|_{L^2(0,1)} + 4\,\|u\|_{L^2(0,1)}\,\|w\|_{L^2(0,1)} \le 4\,\|u\|_{H^1(0,1)}\,\|w\|_{H^1(0,1)}\,, \qquad C_{\mathcal{A}} = 4,\\
\mathcal{A}(w,w) &= \int_0^1 \big((w')^2 + 4w^2\big)\,\mathrm{d}x \ge \int_0^1 \big((w')^2 + w^2\big)\,\mathrm{d}x = \|w\|^2_{H^1(0,1)}\,, \qquad \gamma_{\mathcal{A}} = 1.
\end{aligned}$$

(Attenzione: la stima di coercività vista in classe richiede la disuguaglianza di Poincaré perché ammette il caso $q=0$; qui $q=4$ quindi la coercività segue più facilmente e con una costante migliore.) Allora vale il lemma di Céa:

$$\|u-u_h\|_{H^1(0,1)} \le \frac{C_{\mathcal{A}}}{\gamma_{\mathcal{A}}} \inf_{v_h\in V_h} \|u-v_h\|_{H^1(0,1)} \le \frac{4}{1}\,\|u-w_h\|_{H^1(0,1)}\,,$$

poiché $w_h \in V_h$.

(e) La matrice $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ è simmetrica, quindi i suoi autovalori sono reali.

Il teorema di Gershgorin ci dice che ciascun autovalore di $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ è maggiore o uguale del minimo tra i valori

$$\begin{aligned}
A_{j,j} - \sum_{k\ne j} |A_{j,k}| &= \frac{2}{h} + \frac{8h}{3} - \frac{2}{h} + \frac{4h}{3} = 4h, \qquad j = 2,\dots,n-1,\\
A_{1,1} - \sum_{k\ne 1} |A_{1,k}| &= A_{n,n} - \sum_{k\ne n} A_{n,k} = \frac{2}{h} + \frac{8h}{3} - \frac{1}{h} + \frac{2h}{3} = \frac{1}{h} + \frac{10}{3}h > 4h.
\end{aligned}$$

Abbiamo usato la disuguaglianza $h < |b-a| = 1 < \frac{1}{h}$ e il fatto che i termini di $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ fuori dalla diagonale principale sono negativi. In particolare, gli autovalori sono tutti positivi, la matrice è definita positiva e a predominanza diagonale stretta.

La simmetria della matrice implica anche che $\left\|\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}\right\|_2 = (\min\{\lambda \text{ autovalore di } \underline{\underline{\mathbf{A}}}\})^{-1} \le \frac{1}{4h} = \frac{n+1}{4}$.

(f)

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{h}+\frac{8h}{3} & -\frac{1}{h}+\frac{2h}{3} & 0\\ -\frac{1}{h}+\frac{2h}{3} & \frac{2}{h}+\frac{8h}{3} & -\frac{1}{h}+\frac{2h}{3}\\ 0 & -\frac{1}{h}+\frac{2h}{3} & \frac{2}{h}+\frac{8h}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{26}{3} & -\frac{23}{6} & 0\\ -\frac{23}{6} & \frac{26}{3} & -\frac{23}{6}\\ 0 & -\frac{23}{6} & \frac{26}{3}\end{pmatrix}, \quad \vec{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix}8h\\8h\\8h\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}.$$

Problema 2. Problema con condizioni al bordo miste [14 punti]

Consideriamo il problema al bordo con condizioni al bordo miste:

$$-u''(x) + q(x)u(x) = f(x) \quad x \in (a,b), \qquad u(a) = \alpha, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(b) = \beta. \tag{2}$$

Qui $(a,b) \subset \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $q, f \in C^0([a,b])$, $q \geq 0$.

Per $n \in \mathbb{N}$, fissiamo i nodi equispaziati $x_j = a + hj$, $h = \frac{b-a}{n+1}$, $j = 0, \dots, n+1$.

(a) Scrivere un metodo alle differenze finite che approssima u sui nodi x_j.

Trattare la condizione al bordo di Neumann in modo da garantire un errore di troncamento quadratico.

Prestare attenzione a qual è la corretta dimensione del sistema lineare.

Scrivere il metodo in forma matriciale $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\vec{\mathbf{U}} = \vec{\mathbf{B}}$.

(b) Mostrare che la matrice $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ ottenuta è a predominanza diagonale.

Formulare un'ipotesi sul problema al bordo che garantisca la predominanza diagonale stretta per qualsiasi n.

(c) Mostrare che per $q = 0$ la matrice $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ è invertibile.

Suggerimento: assumere che $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{0}}$ per un vettore $\vec{\mathbf{v}}$ e osservare le relazioni tra i coefficienti v_j.

Soluzione: (a) Sia U_j l'approssimazione numerica di $u(x_j)$ che vogliamo calcolare. Abbiamo condizioni di Dirichlet in $a = x_0$ quindi conosciamo $U_0 = \alpha$, mentre non conosciamo U_{n+1} perché le condizioni in $b = x_{n+1}$ sono di Neumann. Quindi la nostra incognita sarà il vettore $\vec{\mathbf{U}} = (u_1, \dots, u_{n+1})^\top \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Procedendo come a lezione, approssimiamo la derivata seconda di u nei nodi e $u'(b)$ con le differenze finite centrate, usando la tecnica del "ghost point" all'estremo destro dell'intervallo. Otteniamo

$$-\frac{U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}}{h^2} + q_j U_j = f_j \qquad j = 1, \dots, n, \qquad\qquad \frac{U_{n+1} - U_n}{h^2} + \frac{q_{n+1}}{2} U_{n+1} = \frac{f_{n+1}}{2} + \frac{\beta}{h},$$

dove $q_j = q(x_j)$ e $f_j = f(x_j)$. In forma matriciale:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{h^2} + q_1 & -\frac{1}{h^2} & & & & \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + q_2 & -\frac{1}{h^2} & & & \\ & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + q_3 & -\frac{1}{h^2} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + q_n & -\frac{1}{h^2} \\ & & & & -\frac{1}{h^2} & \frac{1}{h^2} + \frac{q_{n+1}}{2} \end{pmatrix}, \qquad \vec{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} f_1 + \frac{\alpha}{h^2} \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_n \\ \frac{f_{n+1}}{2} + \frac{\beta}{h} \end{pmatrix}, \qquad \vec{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} U_1 \\ \\ \vdots \\ \vdots \\ \\ U_{n+1} \end{pmatrix}.$$

(b) Poiché $q \geq 0$ abbiamo

$$|A_{1,1}| = \frac{2}{h^2} + q_1 \geq \frac{1}{h^2} = |A_{2,2}| = \sum_{k=2,\dots,n+1} |A_{j,k}|,$$

$$|A_{j,j}| = \frac{2}{h^2} + q_j \geq \frac{2}{h^2} = |A_{j,j-1}| + |A_{j,j+1}| = \sum_{k=1,\dots,n+1;\ k\neq j} |A_{j,k}| \qquad j = 2, \dots, n,$$

$$|A_{n+1,n+1}| = \frac{1}{h^2} + q_{n+1} \geq \frac{1}{h^2} = |A_{n+1,n}| = \sum_{k=1,\dots,n} |A_{j,k}|,$$

che è la definizione di predominanza diagonale.

Affinché la predominanza diagonale sia stretta, queste $n+1$ disuguaglianze devono essere strette. Questo è garantito se $q(x) > 0$ in $(a,b]$.

(c) Fissiamo $q = 0$. Per assurdo sia $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tale che $\vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ e $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{0}}$. Allora anche $h^2\underline{\underline{\mathbf{A}}}\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{0}}$. Scrivendo quest'equazioni in componenti e procedendo all'indietro otteniamo

$$\begin{aligned} 2v_1 - v_2 &= 0 \\ -v_1 + 2v_2 - v_3 &= 0 \\ -v_2 + 2v_3 - v_4 &= 0 \\ &\vdots \\ -v_{n-1} + 2v_n - v_{n+1} &= 0 \\ -v_n + v_{n+1} &= 0 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} v_n &= v_{n+1} \\ v_{n-1} = 2v_n - v_{n+1} &= v_n \\ &\vdots \\ v_2 = 2v_3 - v_4 &= v_3 \\ v_1 = 2v_2 - v_3 &= v_2 \\ v_1 &= \frac{1}{2} v_2 \end{aligned}$$

Da questo, $v_2 = \frac{1}{2}v_2$, cioè $v_2 = 0$ e tutto il vettore è nullo, $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{0}}$. Quindi $\ker \underline{\underline{\mathbf{A}}} = \{\vec{\mathbf{0}}\}$ e la matrice è invertibile.
