Ingegneria Civile-Ambientale
13/2/2020

Analisi Matematica

Cognome: ______________________

Nome: ______________________

☐ In caso di esito sufficiente della prova scritta, chiedo di sostenere la prova orale facoltativa.

Per ognuna delle seguenti domande, verrà assegnato il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta, oppure 0 punti in caso di risposta sbagliata o non data. Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta ≥ 18 e se il punteggio della prima parte ≥ 12. Il tempo a disposizione è 3 ore.

PRIMA PARTE

1. Sia $z = 2i$ e $C = \overline{z + \bar{z}} + \operatorname{Im}\left(\frac{7z}{z\bar{z}+3} + \frac{\bar{z}-z}{|z|^2}\right)$. Allora $C =$ ____1____ . — 2 pt.

2. Sia

$$I = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x\sin(6x)}{\sin^2(3x)} + \frac{\sin(x)\cos(x)}{x^2} + \frac{3x^2+e^x}{x-x^2-e^x}\right).$$

Allora $6I =$ ____$+\infty$____ . — 2 pt.

3. Sia $f(x) = e^{-x^2} + 2\sin(4\pi x) + 2\pi - 1$ e sia t la retta tangente ad f in $(0, f(0))$. Allora $t(1) =$ ____10π____ . — 2 pt.

4. Sia dato l'integrale definito

$$I = \int_{-\pi}^{\pi}\left(x^3e^{-x^2} + x\sin x + 3\right)\,dx.$$

Allora $I =$ ____8π____ . — 2 pt.

5. Sia per $x > -1$

$$f(x) = \frac{6}{x+6} + \log(1+x) + 3e^{-x}$$

e sia g la funzione inversa di f. Allora $13g'(4) =$ ____-6____ . — 2 pt.

6. Sia R il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=37^{10}}^{\infty}\frac{5^{2n}(x-130)^n}{e^n+n+1}$$

Allora $R =$ ____$\frac{e}{25}$____ . — 2 pt.

7. Calcola la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{y}{y'+1} = 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

____$y(t) = e^t + 1$____ . — 2 pt.

8. Considera $f(x,y) = x^2(1-y^2)$ e $K = [-1,2] \times [-1,1]$. Sia M il valore massimo assunto da f su K e sia m il valore minimo assunto da f su K. Allora $m + M =$ ____4____ .

2 pt.

9. Sia $L(C)$ la lunghezza della curva C parametrizzata dalla funzione $f : [-4; -2] \to \mathbb{R}^3$, $f(t) = \left(t, \frac{t^2}{\sqrt{2}}, \frac{t^3}{3}\right)$. Allora $3C =$ ____62____ .

2 pt.

10. Sia L il lavoro compiuto dal campo $F(x,y,z) = (z, z, x + y + 2z)$ lungo la curva C parametrizzata dalla funzione $r : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $r(t) = (\cos(\pi t), \sin(\pi t), -t^3 + t^2 - t + 1)$. Allora $L =$ ____-2____ .

2 pt.

SECONDA PARTE

11. Sia $f(x) = |2e^{-x^2} - 1|$, $x \in \mathbf{R}$. Quali delle seguenti proprietà ha f? A) continua, B) derivabile, C) sup. limitata, D) inf. limitata, E) monotona, F) convessa, G) concava, H) pari, I) assume minimo assoluto in $x = 0$.
La risposta è: ____**ACDH**____

4 pt.

12. Enunciare il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale.
Soluzione:

3 pt.

13. Dato il parametro reale α e l'integrale improprio $I = \int_1^{+\infty} \sin(x)e^{\alpha x} dx$, stabilire quale (una sola) delle seguenti risposte è corretta:

3 pt.

(a) Per ogni α l'integrale diverge a $+\infty$
(b) L'integrale converge solo per $\alpha \geq 0$
(c) L'integrale converge solo per $\alpha > 0$
(✔) L'integrale converge solo per $\alpha < 0$
(e) L'integrale converge solo per $\alpha < 1$

14. Considera l'equazione differenziale a variabili separabili $y' \cdot y^2 = (y^3 + 27)t^2$.

4 pt.

1. Indica per quali valori di k la funzione costante $y_k(t) = k$ soluzione dell'equazione differenziale.
   ____$k = -3$____ .
2. Determina se la funzione $y(t) = \sqrt[3]{e^{t^3+8} - 27}$ soluzione dell'equazione differenziale.
   ____s____ .
3. (2 punti) Determina se il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' \cdot y^2 = (y^3 + 27)t^2 \\ y(-2) = -\sqrt[3]{26}. \end{cases}$$

   ha almeno una soluzione. In caso di risposta affermativa, scrivi una sua soluzione.
   ____$y(t) = \sqrt[3]{e^{t^3+8} - 27}$____ .