Ingegneria Edile-Architettura
26/2/2021

Analisi Matematica 1

Cognome: ____________________
Nome: ____________________

Appello online. Per ognuna delle seguenti domande, verrà assegnato il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta, oppure 0 punti in caso di risposta sbagliata o non data. Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta ≥ 18. Il tempo a disposizione è 2 ore.

1. Sia $z = \frac{-1}{\sqrt{3}+i}$. Allora $C = 4Im(\bar{z} + z\bar{z}) =$ $\underline{\qquad -1 \qquad}$. 3 pt.

Sol.: $z = -\frac{\sqrt{3}-i}{3+1} = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{4}$, inoltre $z\bar{z} = |z|^2$, per cui $Im(z\bar{z}) = 0$, mentre $\bar{z} = -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{i}{4}$ e quindi $C = -1$.

2. Sia

$$l = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{\cos(x)-1}\right).$$

3 pt.

Allora $6I =$ $\underline{\qquad -1 \qquad}$.

Sol.:

$$\frac{2}{x^2} + \frac{1}{\cos(x)-1} = \frac{2(\cos(x)-1)+x^2}{x^2(\cos(x)-1)} = \frac{-x^2 + \frac{2x^4}{4!} + o(x^4) + x^2}{x^2(\frac{-x^2}{2} + o(x^2))} = \frac{\frac{x^4}{12} + o(x^4)}{-\frac{x^4}{2} + o(x^4)} \to -1/6$$

3. Data la funzione $f(x) = x^3 - 2x - 16$. Sia t la retta tangente ad f che passa per l'origine $(0,0)$. Allora $t(1) =$ $\underline{\qquad 10 \qquad}$. 3 pt.

Sol.: Si ha $f'(x) = 3x^2 - 2$. La retta tangente per $(x_0, f(x_0)$ è dunque $y = x_0^3 - 2x_0 - 16 + (3x_0^2 - 2)(x - x_0) = -2x_0^3 - 16 + (3x_0^2 - 2)x$. Impongo il passaggio per $(0,0)$ e trovo $-2x_0^3 = 16$ da cui $x_0 = -2$, quindi la retta t è $y = 10x$ e $t(1) = 10$.

4. Sia dato l'integrale definito

$$I = \frac{1}{\pi}\int_0^{\sqrt{2\pi}} x^3 \sin(x^2)\, dx\,.$$

3 pt.

Allora $I =$ $\underline{\qquad -1 \qquad}$.

Sol.: Effettuiamo la sostituzione $x^2 = t$. Otteniamo

$$\int_0^{2\pi} t\sin(t)\,\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\left[-t\cos(t)|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}(-\cos(t))\,dt\right] = \frac{1}{2}\left[-2\pi + (\sin(t))|_0^{2\pi}\right] = -\pi$$

5. Sia $\log = \log_e$, e sia

$$l := \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n - 2\sqrt{n}}{n+1}\right)^{\sqrt{n}}.$$

3 pt.

Allora $\log(l) =$ $\underline{\qquad -2 \qquad}$.

Sol.: $e^{\sqrt{n}\log\frac{n-2\sqrt{n}}{n+1}} = e^{\sqrt{n}\log\left(1-\frac{2\sqrt{n}+1}{n+1}\right)} \to e^{-2}$.

3 pt.

6. Sia

$$f(x) = x^5 + x^3 - 3$$

e sia g la funzione inversa di f. Allora $16g'(-1) =$ ____2____ .

Sol.: $f(1) = -1$, $f'(x) = 5x^4 + 3x^2$, $f'(1) = 8$ e quindi $g'(-1) = 1/8$.

3 pt.

7. Sia $f(x) = |x^2 - 9|x^5$. Quali delle seguenti proprietà ha f? A) f è continua su tutto $\mathbf{R}$, B) f è derivabile nel suo dominio, C) fè dispari, D) f è convessa nel suo dominio; E) f ha massimo relativo in $x = -3$; F) f è monotona, G) f è inferiormente limitata, H) ha minimo relativo in $x = 3$. La risposta è: ____**ACEH**____

Sol.: Per $x \neq \pm 3$ f è derivabile e $f'(x) = (7x^6 - 45x^4)\text{sign}(x^2 - 9)$ e $f''(x) = 6x^3(7x^2 - 30)\text{sign}(x^2 - 9)$. f è dispari e non è convessa. Ha minimi in $x = 3$ e $x = -\sqrt{\frac{45}{7}}$. I limiti agli estremi sono rispettimanente $-\infty$ e $+\infty$, per cui non è limitata.

4 pt.

8. Cosa dice il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale? (La risposta corretta è una sola).

A) Se $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ è una funzione continua e G è una sua primitiva su $[a, b]$, allora $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$.

B) Se $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ è una funzione continua e G è una sua primitiva su $[a, b]$, allora $\int_a^b f(x)\,dx = G(a) - G(b)$.

C) Se $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ è una funzione derivabile, allora $\int_a^b f(x)\,dx = f'(b) - f'(a)$.

La risposta è: ____**A**____

5 pt.

9. Dato il parametro $\alpha > 0$ e l'integrale improprio $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)\log(x)}{x^\alpha\sqrt{x^3}}\text{d}x$, stabilire quale (una sola) delle seguenti risposte è corretta:

(a) L'integrale diverge a $+\infty$ per ogni $\alpha > 0$
(✔) L'integrale converge solo per $\alpha \in (0, 1/2)$
(c) L'integrale diverge a $-\infty$ per ogni $\alpha > 0$
(d) L'integrale converge solo per $\alpha > 1/2$
(e) L'integrale converge solo per $\alpha \in (0, 1/2]$