Ingegneria Civile-Ambientale
10/7/2019

Analisi Matematica

Cognome: ____________________
Nome: ____________________

☐ In caso di esito sufficiente della prova scritta, chiedo di sostenere la prova orale facoltativa.

Per ognuna delle seguenti domande, verrà assegnato il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta, oppure 0 punti in caso di risposta sbagliata o non data. Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta ≥ 18 e se il punteggio della prima parte è ≥ 12. Il tempo a disposizione è 3 ore.

PRIMA PARTE

1. Trovare la retta $y = r(x)$ luogo dei punti $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tali che $x = Re(z)$, $y = Im(z)$ e z soddisfi: $|z - i| = |z + 2|$. Allora il coefficiente angolare m della retta r è: $m =$ ___-2___ . (2 pt.)

2. Sia

$$\ell = \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{Sh}(3x) - 3e^x + 3}{x^2 + 2x^3}.$$

Allora $\dfrac{2\ell}{3} =$ ___-1___ . (2 pt.)

3. Sia $f(x) = (1 + x)^{1/3} - 1$. Sia t la retta tangente ad f in $(0, f(0))$. Allora $t(3) =$ ___1___ . (2 pt.)

4. Sia dato l'integrale definito

$$I = \int_0^3 |(x - 2)(x + 1)| + \arctan\left(x - \frac{3}{2}\right) dx.$$

Allora $6I =$ ___31___ . (2 pt.)

5. Sia per $x \in \mathbf{R}$

$$f(x) = 3e^{3x} + 2x^5$$

e sia g la funzione inversa di f. Allora $\dfrac{1}{g'(3)} =$ ___9___ . (2 pt.)

6. Determina per quali valori di α la serie

$$\sum_{n=7}^{\infty} \frac{n^\alpha}{n \arctan(n) \cos(n^\alpha) \sin(n^{-3})}$$

converge. ___$\alpha < -3$___ . (2 pt.)

7. Determina per quali valori iniziali $y_0 \in \mathbb{R}$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (5 - y)^2 \ln(y^2 + 1)(t + 1)^2 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

ha una soluzione costante. ___0 **e** 5___ . (2 pt.)

Nota per gli studenti: la risposta all'esercizio un elenco di numeri reali.

8. Considera la funzione $f(x, y) = \sin(\pi x)\cos(2\pi y)$ e il triangolo $K \subset \mathbb{R}^2$ i cui vertici sono $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(0, 1)$. Sia M il valore massimo assunto da f su K e sia m il valore minimo assunto da f su K. Allora $M - m =$ ____2____ .

2 pt.

9. Considera la curva C parametrizzata dalla funzione $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (t^3, |1 - t^2|)$. Siano t_1, $t_2 \in I$ i punti in cui f non regolare. Allora $t_1 + t_2 =$ ____1____ .

2 pt.

10. Sia $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definito da $U(x, y, z) = xyz$ e sia S la superficie parametrizzata dalla funzione $r : [-1, 1]^2 \to \mathbb{R}^3$, $r(u, v) = (u, u - v, v)$. Sia A il flusso del campo $F(x, y, z) = \nabla U(x, y, z)$ uscente da S con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione r. Allora $3A =$ ____-8____ .

2 pt.

SECONDA PARTE

11. Sia $f(x) = e^{-x^4} + 4$, $x \in \mathbf{R}$. Quali delle seguenti proprietà ha f? A) continua, B) derivabile, C) sup. limitata, D) inf. limitata, E) monotona, F) convessa, G) concava, H) ha minimo assoluto, I) periodica.
La risposta è: ____**ABCD**____

3 pt.

12. Enunciare il teorema del confronto (o dei due carabinieri) per successioni.
Soluzione:

3 pt.

13. Dato il parametro reale positivo $\alpha > 0$ e l'integrale improprio $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2x}{x^\alpha + 3x + \alpha}\,\mathrm{d}x$, stabilire quale (una sola) delle seguenti risposte è corretta:

4 pt.

(a) Per ogni α l'integrale diverge a $+\infty$
(b) L'integrale converge solo per $\alpha \geq 2$
(✔) L'integrale converge solo per $\alpha > 2$
(d) L'integrale converge solo per $\alpha > 0$
(e) L'integrale converge solo per $\alpha > 1$

14. Considera la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + 2y^2 = 1 \text{ e } 0 \leq z \leq 2 - x - y\}$.

4 pt.

1. Sia n il numero di punti singolari di S. Allora $n =$ ____0____ .
2. Determina se il bordo di S $\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + 2y^2 = 1\}$ ____**no**____ .
3. Determina se il bordo di S $\{(x, y, 2 - x - y) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + 2y^2 = 1\}$ ____**no**____ .
4. Sia N il versore normale uscente da S nel punto $(1/2, -1/2, 3/2)$. $N = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$.