

Per ognuna delle seguenti domande, verrà assegnato il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta, oppure 0 punti in caso di risposta sbagliata o non data. Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta ≥ 18 e se il punteggio della prima parte ≥ 12 . Il tempo a disposizione è 2 ore.

PRIMA PARTE

1. Sia $z = 2 + 3i$ e $C = z - \bar{z} + \operatorname{Re} \left(\frac{14}{z\bar{z} + 1} + i \frac{\bar{z} + z}{|z|^2 - 1} \right)$. Allora $C =$ 6i + 1 .

3 pt.

2. Sia

$$\ell = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\log(1 + x^2)}{x(\sqrt{1 + 2x} - 1)} + \frac{|x|^2 - x^4}{x|x| + x^3} + \frac{x^2 \log(|x|)}{x} \right).$$

Allora $\ell =$ 2 .

3 pt.

3. Sia $f(x) = \frac{x^2 \log(x) - 1}{x}$ e sia t la retta tangente ad f in $(1, f(1))$.

Allora $t(2) =$ 1 .

3 pt.

4. Sia I l'integrale definito

$$I = \int_0^2 \frac{\log(2x + 1)}{(2x + 1)^2} dx.$$

Allora $10I =$ 4 - \log 5 .

3 pt.

5. Sia

$$\ell := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2n^4 \sqrt{1 - \cos(1/n^4)} + e^{n^{-1/3}} - 1 + \frac{\sin(n)}{n^2} \right).$$

Allora $\ell =$ $\sqrt{2}$.

3 pt.

6. Sia, per $x \in (0, e)$,

$$f(x) = \frac{x^2}{\log|x| - 1}$$

e sia g la funzione inversa di f . Allora $g'(-1) =$ -1/3 .

3 pt.

SECONDA PARTE

7. Sia $f(x) = ((x - 1)(x - 2)^2)^{1/3}$. Quali delle seguenti proprietà ha f ? A) continua nel suo dominio, B) derivabile nel suo dominio, C) sup. limitata, D) inf. limitata, E) monotona nel suo dominio, F) ha un punto di minimo relativo, G) ha una cuspidè, H) ha asintoto orizzontale.

La risposta è: **AFG**

4 pt.

8. Enunciare il Teorema di Fermat.

Soluzione:

4 pt.

9. Dato l'integrale improprio $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2 + x + 1} dx$, stabilire quale (una sola) delle seguenti risposte è corretta:

- (a) L'integrale diverge a $+\infty$
- (b) L'integrale diverge a $-\infty$
- (c) L'integrale converge
- (d) L'integrale oscilla

4 pt.