

Per ognuna delle seguenti domande, verrà assegnato il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta, oppure 0 punti in caso di risposta sbagliata o non data. Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta ≥ 18 e se il punteggio della prima parte ≥ 12 . Il tempo a disposizione è 2 ore.

PRIMA PARTE

1. Sia $z = 3 + i$ e $C = \left| \left(\frac{z}{z-3} + 2\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}z - z\bar{z} \right) \right|^2$. Allora $C =$ 13 .

3 pt.

2. Sia

$$\ell = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{1/x} - 1 + x + 4x}{\log^9(|x|) + 2 + 6x}.$$

3 pt.

Allora $\ell =$ 1/6 .

3. Sia $f(x) = e^{-x}(1 - e^{-2x})$ e sia t la retta tangente ad f in $((\log(3))/2, f((\log(3))/2))$. Allora $t(1) =$ $2/(3\sqrt{3})$.

3 pt.

4. Sia dato l'integrale definito

$$I = \int_0^1 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{e^x}{1 + e^{2x}} \right) dx.$$

3 pt.

Allora $I =$ $\arctan(e)$.

5. Sia per $x \geq 3/2$, $f(x) = (x-1)^3(2-x)$ e sia g la funzione inversa di f . Allora $g'(0) =$ -1 .

3 pt.

6. Sia

$$\ell := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{1/n} - \cos(1/n)}{\sqrt[3]{1 + 1/n} - 1 + 1/n} \right).$$

3 pt.

Allora $\ell =$ 3/4 .

SECONDA PARTE

7. Sia $f(x) = \log(x) - \arctan(x - 1)$. Quali delle seguenti proprietà ha f ? A) è definita su tutto \mathbf{R} , B) derivabile, C) superiormente limitata, D) inferiormente limitata, E) monotona, F) ha un asintoto verticale, G) convessa, H) ha massimo relativo in $x = 1$. La risposta è: BFH

4 pt.

8. Enunciare il teorema del valor medio di Lagrange.

Soluzione:

3 pt.

9. Dato l'integrale improprio $I = \int_0^1 \frac{\log(1 + \sqrt{x})}{\sin^\alpha(x)} dx$, stabilire quale (una sola) delle seguenti risposte è corretta:

5 pt.

- (a) L'integrale diverge a $+\infty$
- (b) L'integrale diverge a $-\infty$
- (c) L'integrale converge per ogni α
- (d) L'integrale converge solo per $\alpha < 3/2$
- (e) L'integrale converge solo per $\alpha > 3/2$