Lezione 1-10

L'insieme di definizione di una funzione f è il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}$ dove hanno senso le operazioni descritte in f.

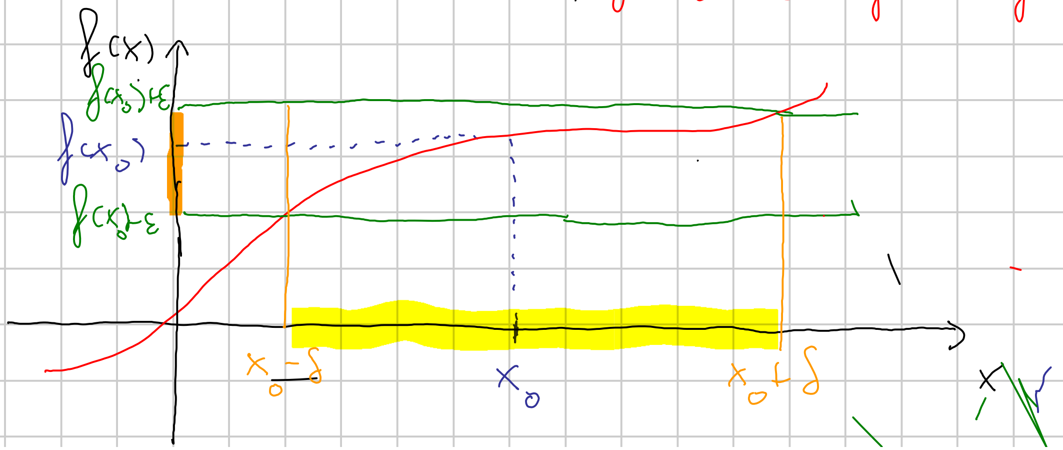
$\sqrt{x^2} = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$ perché $f(x) = x^2$ ha come immagine $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ e $\mathbb{R}_+ \subset \mathrm{Dom}(g(x) = \sqrt{x})$

Continuità

Def: $A \subset \mathbb{R}$ $\quad f: A \to \mathbb{R}$. Dato $x_0 \in A$, f si dice continua in x_0 se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che

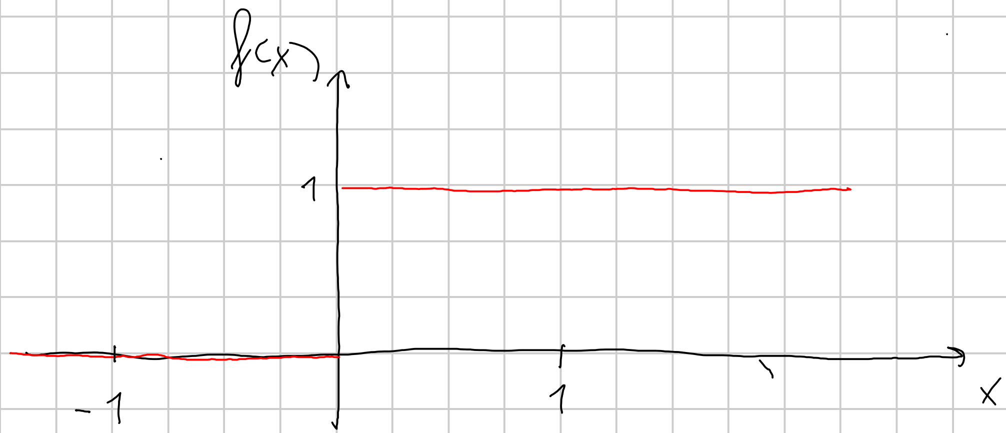
$$x \in A \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \qquad f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$



$$x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \Rightarrow f(x) \in [f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon]$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$



Non è continua in $x_0 = 0$, ma è continua $\forall \, x_0 \neq 0$

Verifichiamo che f non è continua in $x_0 = 0$.

Se prendiamo $\varepsilon = 5$ la definizione di continuità è verificata, infatti $0 - 5 < f(x) < 0 + 5$ è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$.

Se invece scegliamo $\varepsilon = \frac{1}{2}$, dobbiamo cercare un $\delta > 0$ tale che $\forall x$ t.c. $|x| < \delta$ $-\frac{1}{2} < f(x) < \frac{1}{2}$.

Non troviamo mai un tale δ, poiché $\forall x$ t.c. $0 < x < \delta$ vale che $f(x) = 1 \underset{\neq}{>} \frac{1}{2}$

Polinomi sono continui, log ed esponenziali sono continui; seno e coseno sono continui.

Teorema Se f e g sono funzioni continue in x_0 ($f: A \to \mathbb{R}$, $g: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$), allora:

1) $f+g$ è continua in x_0

2) $f \cdot g$ è continua in x_0.

3) $|f|$ è continua.

Con questo teorema possiamo dire che tutti i polinomi

Sono funzioni continue.

1) $f(x) = x$ è continua.

$\Rightarrow f(x) = x^2 = x \cdot x$ è continua, $x^3, x^4, \dots$ sono continue

x^n continua $\forall n$,

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ è continua in ogni $x \in \mathbb{R}$.

in quanto somma di funzioni continue.

Def: $f : A \to \mathbb{R}$, $B \subset A$, diciamo che f è continua in B se f è continua in x_0 $\forall x_0 \in B$

Se dico che f è continua intendo che è continua su tutto il suo insieme di definizione.

Es: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$ $\quad f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$

$B = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ - f è continua su B

Es: $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$ $\quad g: (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \to \mathbb{R}.$

g è continua (continua sul suo dominio)

Es: $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f : \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

È continua (0 non appartiene al dominio di f).

Teorema di permanenza del segno

Data $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. Se f è continua in x_0 e $f(x_0) > 0$, allora $\exists\, \delta > 0$ t.c. se $x \in A$ e $|x - x_0| < \delta$, allora $f(x) > 0$. Stesso risultato se è $f(x_0) < 0$. In tal caso $|x - x_0| < \delta$ allora $f(x) < 0$

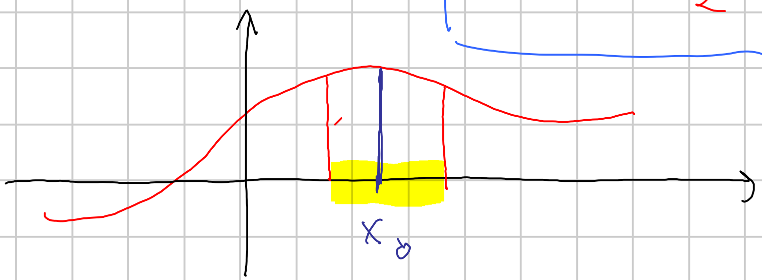
Dimostrazione: $f(x_0) > 0$. Scegliamo $\varepsilon = \dfrac{f(x_0)}{2} > 0$

nella definizione di continuità in x_0. Allora $\exists\, \delta > 0$ tale che

se $x \in A$ e $|x - x_0| < \delta$, risulta $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$,

cioè $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$

$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon = \boxed{f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2}} = \frac{f(x_0)}{2} > 0.$$



Corollario: Dato $A \subset \mathbb{R}$ $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, se f è continua in x_0 e $f(x_0) > M \in \mathbb{R}$, allora $\exists\ \delta > 0$ t.c. $|x - x_0| < \delta$ e $x \in A$ allora $f(x) > M$.

Dimostrazione: Applichiamo il teo di permanenza del segno

$g(x) = f(x) - M$.

(f continua in $x_0 \Rightarrow g$ è continua in x_0)

$\underbrace{f(x) - M}_{g(x)} > 0 \Leftrightarrow f(x) > M.$

Teorema: $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. Se f è continua in x_0 e $f(x_0) \neq 0$, allora $\frac{1}{f}$ è continua in x_0.

Oss: Il teorema di permanenza del segno permette di dire che $\frac{1}{f}$ è definita in un intervallo intorno a x_0 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

$\Rightarrow$ ha senso parlare di continuità in x_0.

Corollario: $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, $g: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$.
f e g continue in x_0, e $g(x_0) \neq 0$. Allora f/g è

continua in x_0.

Dim: $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$

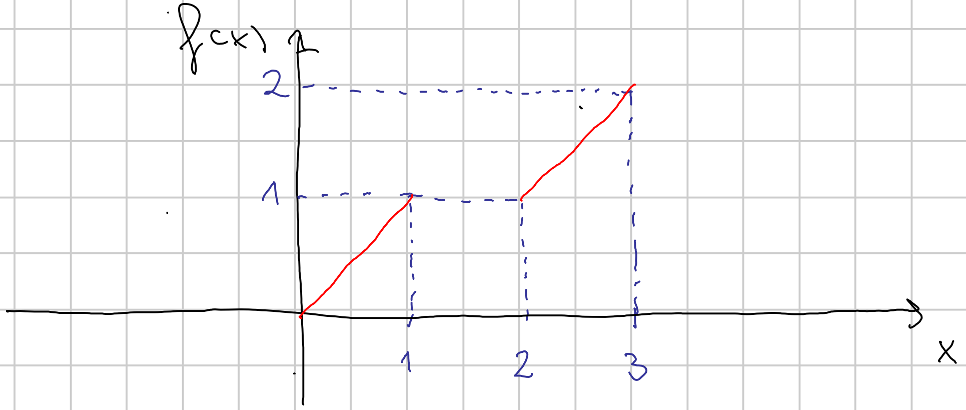
continua in x_0 continua in x_0.

Prop: $I \subset \mathbb{R}$ intervallo $f : I \to B \subset \mathbb{R}$. Se f e' continua in I e invertibile, allora $f^{-1} : B \to I$ e' continua in B.

L'ipotesi che il dominio sia un intervallo e' necessaria:

Esempio: $f: [0,1] \cup (2,3] \to [0,2]$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ x-1 & \text{se } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

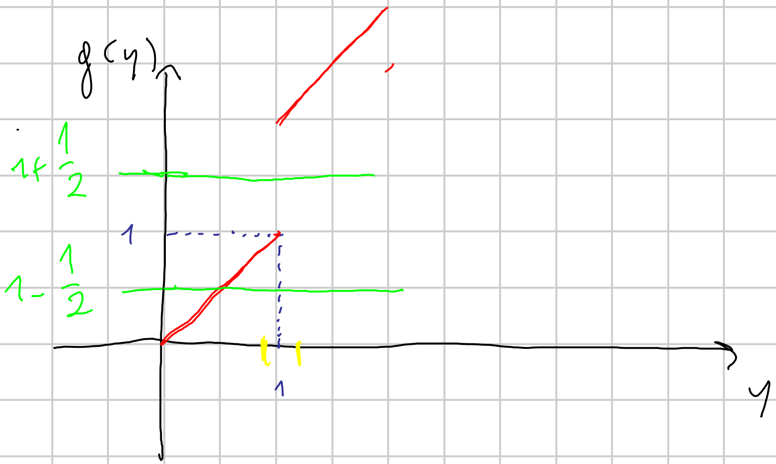


È surgettiva e iniettiva poiché strettamente crescente.

f ammette un'inversa $g: [0,2] \to [0,1] \cup (2,3]$

g non è continua in $y=1$ (verificare)

$g(1)=1$



$\varepsilon = \frac{1}{2}$

$\forall \delta > 0$

l'intervallo

$(1-\delta, 1+\delta)$ contiene

delle $y > 1$

$\forall y$ t.c. $1 < y < 1+\delta$ $g(y) > 2 > 1+\varepsilon$

Continuità delle funzioni elementari

- Polinomi sono funzioni continue.
- Le funzioni razionali sono continue sul loro insieme di definizione

Funzioni razionali $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, p, q polinomi

$f(x)$ è definita su $\mathbb{R} \setminus \{x$ tali che $q(x) = 0\}$.

Assumendo che e^x, $\sin x$, $\cos x$ siano continue, sono continue anche $\log x$, $\arcsin x$, $\arccos x$,

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ è continua su $\{\cos x \neq 0\}$, $\arctan x$

$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

B
$\Downarrow$

Teorema: $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, $y_0 = f(x_0)$

Se f è continua in x_0 e g è continua in y_0, allora

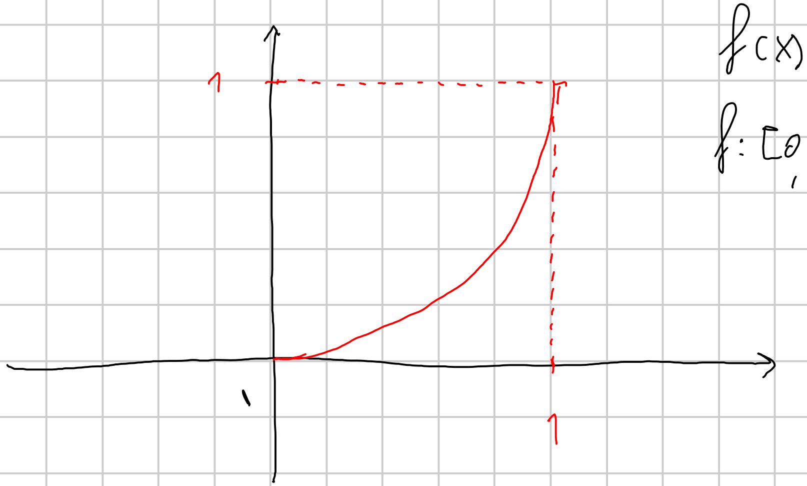
$g \circ f : A \to \mathbb{R}$ è continua in x_0.

Esempio: $e^{\sin x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua in quanto composizione di $f(x) = \sin(x)$ con $g(y) = e^y$ e f e g sono entrambe continue.

Oss: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a,b]$. Allora

$$\sup_{(a,b)}(f) = \sup_{[a,b]}(f)$$

$$\inf_{(a,b)}(f) = \inf_{[a,b]}(f)$$



$f(x) = x^2$

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$

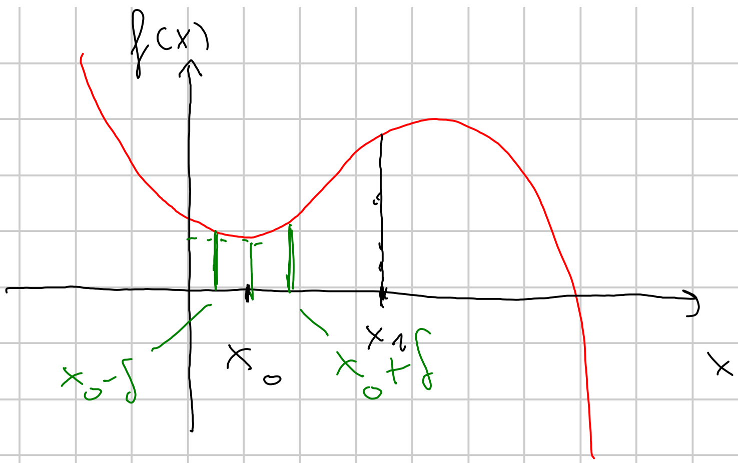
$$\sup_{[0,1]} f(x) = \max_{[0,1]} f = 1^2 = 1.$$

$$f((0,1)) = (0,1)$$

$$\sup_{(0,1)} f(x) = \sup(f(0,1)) = \sup(0,1) = 1$$ - non è un max su $(0,1)$.

Def: $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ un punto $x_0 \in A$ si dice punto di minimo locale (o punto di minimo relativo) se $\exists\ \delta > 0$ t.c. $\forall\ x \in A$ t.c. $|x - x_0| < \delta$ vale

$$f(x) \geq f(x_0)$$


f(x)
x
x₀
x₁
x₀-δ
x₀+δ