Lezione 10-10

Teorema di somma e prodotto di limiti.

$A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$ $f, g : A \to \mathbb{R}$.

Supponiamo che $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell_2$ $\ell_1, \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$

1) Se ha senso $\ell_1 + \ell_2$ allora $\exists \lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = \ell_1 + \ell_2$.

2) Se ha senso $\ell_1 \cdot \ell_2$ allora $\exists \lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = \ell_1 \cdot \ell_2$

Il teorema non vale nei casi di indeterminazione:

$(+\infty)+(-\infty)$

$(-\infty)+(+\infty)$

$(+\infty)\cdot 0$

$(-\infty)\cdot 0$.

Esempi di indeterminazione

1) $f(x)=2x$, $g(x)=-x$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f+g)(x) = (+\infty) + (-\infty) \; ?$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f+g)(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x - x = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

2) $f(x) = \dfrac{x}{2}$, $g(x) = -x$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty.$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f+g)(x) = (+\infty) + (-\infty) = ?$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f+g)(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{2} - x = \lim_{x \to +\infty} -\frac{x}{2} = -\infty$$

3) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to +\infty} 1 = 1$$

Es: $0 \cdot \infty$

$f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x^2$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

In questo caso

$f \cdot g(x) = \frac{1}{x} \cdot x^2 = x$ $\lim_{x \to +\infty} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$

Prop: $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$.

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ (ℓ è finito), allora f è

limitata in un intorno di x_0,

cioè $\exists\, U \in \mathcal{I}(x_0)$, ed $\exists\, M > 0$ t.c.

$$\underline{x \in U \cap A \setminus \{x_0\}} \Rightarrow |f(x)| < M$$

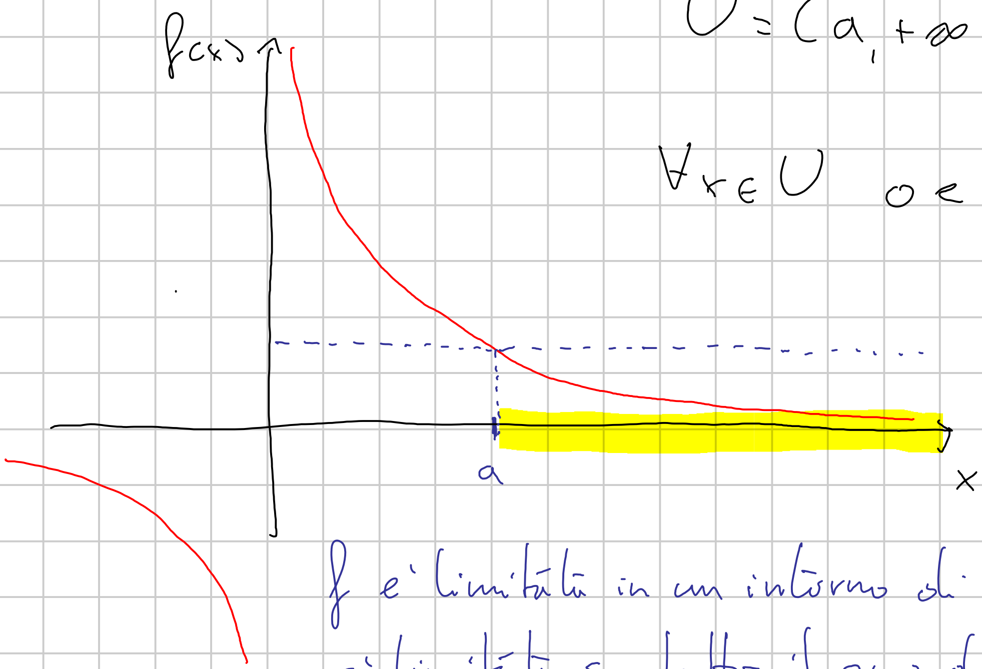
↳ x è vicino a x_0 ($x \in U$)

x è nel dominio A della f

x è $\neq$ da x_0

Es: $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \in \mathbb{R}.$$



$U = (a, +\infty)$ con $a > 0$

$\forall x \in U \quad 0 < f(x) < \frac{1}{a}$

$|f(x)| < \frac{1}{a}$

f è limitata in un intorno di $+\infty$, ma non è limitata su tutto il suo dominio.

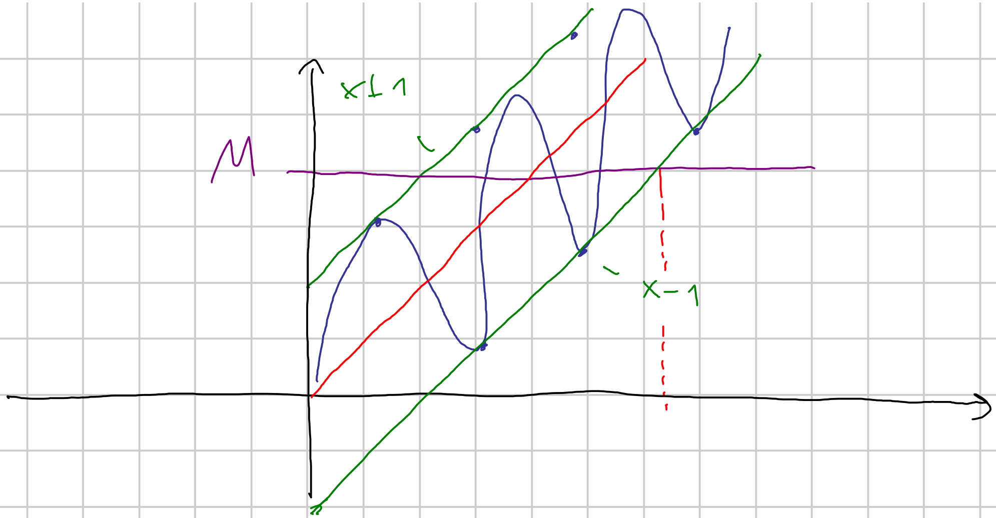
Oss: Se f è limitata inferiormente in un intorno di x_0.
e $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, allora $\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = +\infty$

Es: $f(x) = \sin x$. $g(x) = x$.

Non esiste $\lim_{x \to +\infty} \sin x$

Notiamo che $\sin x \geq -1$ $\forall x \in \mathbb{R}$, pertanto $\sin x$ è limitata inferiormente.

$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$. $\Rightarrow$ $\lim_{x \to +\infty} x + \sin x = +\infty$



Se f è limitata superiormente in un intorno di x_0, e

$\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} (f+g)(x) = -\infty$.

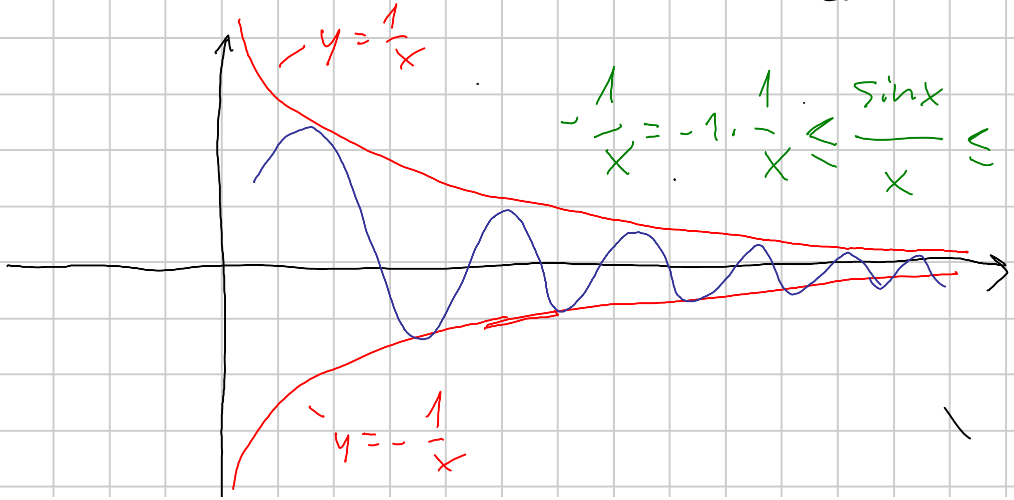
Oss: Se f è limitata in un intorno di x_0, e $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$.

allora $\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = 0$

$$\boxed{-1 \leq \sin x \leq 1}$$

Es: $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x}$ $\quad f(x) = \sin x \quad |\sin x| \leq 1 \Rightarrow f$ è limitata.

$g(x) = \frac{1}{x}$. $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} (g \cdot f)(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$



$$-\frac{1}{x} = -1 \cdot \frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

Terminologia:

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ f si dice infinitesima per $x \to x_0$.

- Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ si dice che f diverge positivamente per $x \to x_0$.

- Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ f diverge negativamente per $x \to x_0$.

Prop: Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0^+$, allora $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0^-$, allora $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

- Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, $\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0^+$
- Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0^-$
- Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, e $\ell \neq 0, \pm\infty \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell}$

Limiti fondamentali

Polinomi: $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

$a_i \in \mathbb{R}$ $i = 0, \dots, n$. Polinomio di grado n.

$\lim_{x \to +\infty} p(x) = ?$

$$\lim_{x \to +\infty} 3x^2 - 5x = +\infty - \infty$$

$$3x^2 - 5x = \underbrace{x^2}_{\infty} \underbrace{\left(\overset{3}{3} - \overset{0}{\frac{5}{x}} \right)}_{3} = \lim_{x \to +\infty} 3x^2 - 5x = +\infty$$

$\circ \lim_{x\to+\infty} p(x) = \text{sgn}(a_n)\cdot\infty = \begin{cases} +\infty & \text{se } a_n>0 \\ -\infty & \text{se } a_n<0 \end{cases}$

a_n = coefficiente del monomio di grado + alto.

$$p(x)$$

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = x^n \cdot \left(a_n + a_{n-1}\cdot\frac{1}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right)$$

$-\infty$ se n dispari
$+\infty$ se n e' pari

$\downarrow$
a_n

$$\text{sgn}(a) = \begin{cases} 1 & \text{se } a>0 \\ -1 & \text{se } a<0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = \begin{cases} \text{sgn}(a_n)\cdot\infty & \text{se } n \text{ e' pari} \\ \text{sgn}(a_n)(-\infty) & \text{se } n \text{ e' dispari} \end{cases}$$

Es: $\lim_{x \to -\infty} -5x^3 + 7x^2 = +\infty$

$-5 \cdot (-\infty) = +\infty$

I polinomi si comportano a $\pm\infty$ come il loro monomio di grado più alto. Inoltre divergono sempre.

<u>Funzioni razionali</u>

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \begin{array}{l} \leftarrow \text{grado } n \\ \leftarrow \text{grado } m. \end{array}$$

$$p(x) = a_n \cdot x^n + \overbrace{\ldots\ldots}^{\text{termini di grado + basso}}$$

$$q(x) = b_m \cdot x^m + \ldots\ldots$$

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n+1} + \ldots\ldots}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots\ldots} =$$

$$= \frac{x^n \cdot \left(a_n + \overbrace{a_{n-1} \cdot \frac{1}{x} + \ldots\ldots}^{\to 0}\right)}{x^m \cdot \left(b_m + \underbrace{b_{m-1} \cdot \frac{1}{x} + \ldots\ldots +}_{\to 0}\right)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a_n \cdot x^n}{b_m \cdot x^m}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \begin{cases} \operatorname{sgn}\left(\frac{a_n}{b_m}\right)(+\infty) & \text{se } n>m \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{se } n=m \\ 0 & \text{se } n<m \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 0^+ se $\frac{a_n}{b_m} > 0$

0^- se $\frac{a_n}{b_m} < 0$

Limite a $-\infty$: $\lim_{x\to-\infty} \frac{7x^5+5x^2}{-3x^3+2x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{7x^5}{-3x^3} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{7}{3}x^2 =$

$$= -\frac{7}{3}\cdot(+\infty) = -\infty$$

Limiti fondamentali

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$ Lo verifichiamo usando

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2\cdot(1+\cos x)} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2\cdot(1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x^2\cdot(1+\cos x)} =$$

$$= \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos x} \quad \to \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

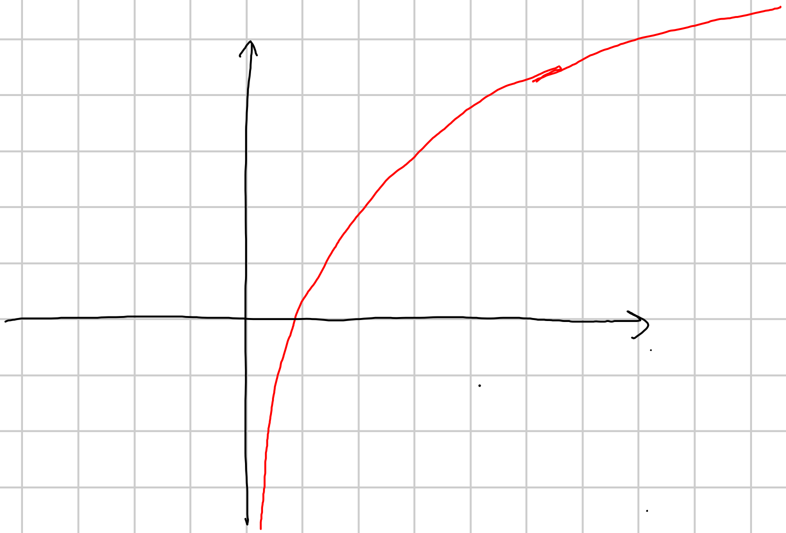
$$\downarrow 1 \qquad \downarrow \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to +\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x\to -\infty} e^x = 0^+$$

$$\lim_{x \to 0^+} \log x = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty$$



Limite della composizione

Teo: Siano $A, B \subset \mathbb{R}$, $f: A \to B$, $g: B \to \mathbb{R}$.

Sia $x_0 \in Acc(A)$. Se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$, $y_0 \in Acc(B)$,

$\exists \lim_{y \to y_0} g(y)$ e inoltre è verificata almeno una delle seguenti

condizioni:

1) $y_0 \in B$, e g è continua in y_0.

2) $\exists\, V \in \mathcal{I}(x_0)$ t.c. $f(x) \neq y_0 \quad \forall x \in V \cap A \setminus \{x_0\}$

allora $\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = \lim_{y \to y_0} g(y)$.