Lezione 10-12

Simulazione: oggi ore 14 Aula F

Eq. diff. del 2° ordine omogenee.

Pol. caratteristico senza radici reali

$$y'' + a\cdot y' + b = 0, \qquad a,b\in\mathbb{R}$$

pol. caratt. $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ senza radici reali $\Delta = a^2 - 4b < 0$

Ci sono 2 radici complesse coniugate

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta. \qquad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

Le due soluzioni fondamentali sono

$y_1(x) = e^{\alpha x} \cdot (\cos(\beta x))$, $y_2(x) = e^{\alpha x} \cdot (\sin(\beta x))$

La soluzione generale dell'equazione e'

$$y(x) = e^{\alpha x} \cdot (c_1 \cdot \cos(\beta x) + c_2 \cdot \sin(\beta x))$$

Es: $y'' + y = 0$

pol. caratt. $\lambda^2 + 1 = 0$ radici $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$

$\lambda_1 = 0 + 1 \cdot i$, $\lambda_2 = 0 + (-1) \cdot i$

$y(x) = e^{0 \cdot x} \cdot \left(c_1 \cdot \cos(1 \cdot x) + c_2 \sin(1 \cdot x)\right) = c_1 \cdot \cos(x) + c_2 \cdot \sin(x)$

Es: $y'' - 4y' + 13y = 0$

Pol. caratteristico $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$

$$\lambda = 2 \pm \sqrt{4-13} = \frac{4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = 2 \pm \sqrt{-9} = \underline{2 \pm 3i}$$

$\alpha = 2, \quad \beta = 3$

Soluzione generale $e^{2x} \cdot \left(c_1 \cdot \cos(3x) + c_2 \cdot \sin(3x)\right)$.

Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''-2y'+2y=0 \\ y(0)=2 \\ y'(0)=1 \end{cases}$$

Pol. caratt: $\lambda^2-2\lambda+2=0$

Radici: $\lambda = 1\pm\sqrt{1-2} = 1\pm i$, $\alpha=1$, $\beta=1$

Sol. generale $y(x)=e^x\cdot\left(c_1\cdot\cos x + c_2\cdot\sin x\right)$

Trovo c_1 e c_2 a partire dalle condizioni iniziali:

Dalla prima condizione

$$2 = y(0) = e^0 \cdot (c_1 \cdot \cos 0 + c_2 \cdot \sin 0) = c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 2$$

Per usare la seconda condizione devo calcolare $y'(x)$

$$y'(x) = e^x \cdot (c_1 \cdot \cos x + c_2 \cdot \operatorname{sen} x) + e^x (-c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x)$$

$$1 = y'(0) = 1 \cdot (c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0) + 1 \cdot (-c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1) = c_1 + c_2$$

$$\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_1 + c_2 = 1 \end{cases} \quad c_1 + 2 = 1 \quad \begin{matrix} c_1 = 2 \\ c_2 = 1 - 2 = -1 \end{matrix}$$

Sostituisco $c_1 = 2$ e $c_2 = -1$ nella soluzione generale

$$y(x) = e^x \cdot (c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x) = \boxed{e^x \cdot (2\cos x - \operatorname{sen} x)}$$

La sol. del problema di Cauchy.

Equazione completa (non omogenea)

(*) $y'' + ay' + b \cdot y = f$ con $f \neq 0$ $(f = f(x))$

Supponiamo di avere trovato una soluzione particolare dell'equazione (*), che chiamiamo $\bar{y}$.

Prendiamo una soluzione y_0 dell'equazione omogenea

$$y_0'' + a y_0' + b y_0 = 0$$

Allora se indico $y = y_0 + \bar{y}$ otteniamo che y risolve (*).

Infatti

$$y'' + ay' + by = (\bar{y} + y_0)'' + a(\bar{y} + y_0)' + b(\bar{y} + y_0) =$$

$$= \underbrace{\bar{y}'' + a\bar{y}' + b\bar{y}}_{f} + \underbrace{y_0'' + a y_0' + b y_0}_{0} = f$$

Tutte le soluzioni dell'equazione completa

$y'' + ay' + by = f$ si ottengono sommando una soluzione dell'equazione completa con le soluzioni generali dell'equazione omogenea associata.

$\bar{y}$ si chiama soluzione particolare. Come si trova $\bar{y}$?

Usiamo il metodo dei coefficienti indeterminati.

Si applica a $f(x)$ di tipo speciale. f deve essere della seguenti forme:

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot \left(p(x) \cdot \cos(\beta x) + q(x) \cdot \sin(\beta x) \right)$$

dove $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $p(x)$ e $q(x)$ sono polinomi.

Osserviamo che possono essere presenti sia sin che il cos ma devono avere la stessa frequenza β

Occhio! $f(x) = \cos(3x) + \sin(2x)$ non e' della forma giusta

$f(x) = e^{5x} \cdot (x \cos(2x) + x^2 \cdot \sin(2x))$ va bene

$\alpha = 5$, $\beta = 2$ $p(x) = x$, $q(x) = x^2$

- Se f è della forma voluta, cerco una soluzione particolare dell'equazione della forma:

$$\bar{y}(x) = x^{m} \cdot e^{\alpha x} \left[r(x) \cdot \cos(\beta x) + s(x) \sin(\beta x) \right]$$

dove $r(x)$ e $s(x)$ sono polinomi incogniti con

$$\text{grado}(r(x)) = \text{grado}(s(x)) = \max\{\text{grado}(p(x)), \text{grado}(q(x))\}$$

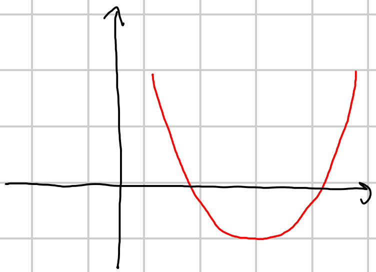
m è la molteplicità di $\alpha + i\beta$ come radice del polinomio caratteristico.

|| Se $\alpha + i\beta$ non è radice del polinomio caratteristico, allora $m = 0$ ||

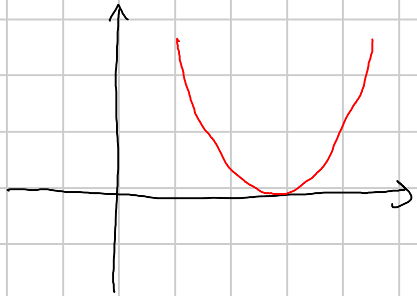
$(\lambda-3)^2$ $\lambda=3$ radice di molteplicità 2 $(\Delta=0)$

$(\lambda-2)\cdot(\lambda-4)$ 2 e 4 sono radici di molteplicità 1 $(\Delta>0)$

2 radici molt. 1



1 radice molt. 2



$p(x) = x^n + a_{n-1}\cdot x^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{C}[x]$

$\|$

$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot \ldots \cdot (x-\alpha_n)$

Es: $y'' + 4y = \sin x$

Omogenea: $y'' + 4y = 0$

Pol. caratt. $\lambda^2 + 4 = 0$ radici $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$

Soluzione omogenea

$$y_0(x) = c_1 \cdot \cos(2x) + c_2 \cdot \sin(2x)$$

Cerchiamo una soluzione particolare.

Guardiamo il termine noto $f(x) = \sin x$

Devo scriverlo nella forma generale

$f(x) = e^{\alpha x} \cdot (p(x) \cdot \cos(\beta x) + q(x) \cdot \sin(\beta x))$

Per ottenere $f(x) = \sin x$ devo scegliere α, β, P, q come?

$\boxed{\alpha = 0, \ \beta = 1,}$ $p(x) \equiv 0, \ q(x) = 1.$

$\alpha + i\beta = 0 + 1 \cdot i = i$ è radice del polinomio caratt. dell'equazione ($\lambda^2 + 4 = 0$)?

NO non è radice $\Rightarrow m = 0$

grado $(p(x))$ = grado $(q(x)) = 0$. Allora nella soluzione particolare

devo cercare due polinomi $r(x)$ e $s(x)$ di grado 0 (polinomi incogniti).

Cioè $r(x) = A$, $s(x) = B$ con A e B da determinare

$\bar{y}(x) = x^m \cdot e^{\alpha x} \cdot \left[r(x) \cdot \cos(\beta x) + s(x) \cdot \sin(\beta x) \right] =$

$= x^0 \cdot e^{0 \cdot x} \cdot \left[A \cos(1 \cdot x) + B \sin(1 \cdot x) \right] = A \cos x + B \sin x$

Ora devo trovare A e B.

Sostituisco $\bar{y}$ nell'equazione completa $\bar{y}'' + 4\bar{y} = \sin x$

$\bar{y} = A \cos x + B \sin x$

$\bar{y}' = -A \sin x + B \cos x$

$\bar{y}'' = -A \cos x - B \sin x$

$(-A \cos x - B \sin x) + 4(A \cos x + B \sin x) = \sin x$

$3A \cdot \cos x + 3B \cdot \sin x = \sin x + 0 \cdot \cos x$

Uguaglio i coefficienti di $\sin x$ e $\cos x$ a sx e dx dell'uguale

$$\begin{cases} 3A = 0 \\ 3B = 1 \end{cases} \Rightarrow A = 0, \quad B = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \bar{y}(x) = A\cos x + B\sin x = \frac{1}{3}\sin x$$

Sol. generale dell'equazione completa è

$$y = y_0 + \bar{y} = C_1 \cdot \cos(2x) + C_2 \cdot \sin(2x) + \frac{1}{3}\sin x.$$

Es: $y'' + 4y = \sin(2x)$

Omogenea $y''+4y=0$ $\lambda^2+4=0$ radici $\pm 2i$

$y_0 = C_1 \cdot \cos(2x) + C_2 \cdot \sin(2x)$

$f(x) = \sin(2x) = e^{\alpha x} \cdot \left(p(x) \cdot \cos(\beta x) + q(x) \sin(\beta x)\right)$

quindi $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $p(x) = 0$, $q(x) = 1$

$\alpha + i\beta = 2i$ – è radice del pol. caratt. di molt. 1. $m = 1$

$\bar{y}(x) = e^{\alpha x} \cdot x^m \cdot \left(r(x) \cdot \cos(\beta x) + s(x) \cdot \sin(\beta x)\right) =$

$= x \cdot \left(A \cdot \cos(2x) + B \cdot \sin(2x)\right)$

Per trovare A e B, sostituisco $\bar{y}$ nell'equazione generale

$$\bar{y}' = A\cdot\cos(2x) + B\sin(2x) + x\cdot\left(-2A\cdot\sin(2x) + 2B\cdot\cos(2x)\right)$$

$$\bar{y}'' = -2A\cdot\sin(2x) + 2B\cos(2x) + \left(-2A\sin(2x) + 2B\cdot\cos(2x)\right) +$$
$$x\cdot\left(-4A\cos(2x) - 4B\cdot\sin(2x)\right)$$

Sostituisco in $\bar{y}'' + 4\bar{y} = \sin(2x))$

$$-4A\cdot(\sin 2x) + 4B\cos(2x) \cancel{- 4Ax\cos(2x)} \cancel{- 4Bx\sin(2x)} \leftarrow \bar{y}''$$

$$+4\underbrace{\left(\cancel{Ax\cdot\cos(2x)} + \cancel{Bx\sin(2x)}\right)}_{\bar{y}} = \sin 2x$$

$-4A\cdot\sin(2x)+4B\cdot\cos(2x)=\sin 2x$

$$\begin{cases} -4A=1 \\ 4B=0 \end{cases} \Rightarrow \quad B=0, \quad A=-\frac{1}{4}$$

$$\bar{y}=\underline{x(A\cos(2x)+B\sin(2x))}=-\frac{1}{4}x\cdot\cos(2x)$$

Sol. generale $y(x)=c_1\cdot\cos(2x)+c_2\cdot\sin(2x)-\frac{1}{4}x\cos(2x)$

Problema di Cauchy.

$$\begin{cases} y''-y=e^{x} \\ y(1)=0 \\ y'(1)=\frac{e}{2} \end{cases}$$

Omogenea $y'' - y = 0$

pol. caratt. $\lambda^2 - 1 = 0$ radici $\lambda = \pm 1$

Sol. omogenea $y_0 = c_1 \cdot e^{x} + c_2 \cdot e^{-x}$

Sol. particolare $\bar{y}$

$f(x) = e^x = e^{\alpha x} \cdot (p(x) \cdot \cos(\beta x) + q(x) \cdot \sin(\beta x))$

$\alpha = 1$, $\beta = 0$, $p(x) = 1$, $q(x) = 0$

$\alpha + i\beta = 1$ radice del pol. caratt. di molt. 1 $m = 1$

grado s = grado r = 0 $r(x) = A$, $s(x) = B$

$\bar{y} = e^x \cdot x \cdot A$

$\bar{y}' = A \cdot e^x + A \cdot x \cdot e^x$

$\bar{y}'' = 2A \cdot e^x + A \cdot x \cdot e^x$, sostituiamo in $\bar{y}'' - \bar{y} = e^x$

$2Ae^x = e^x \Rightarrow 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

$\bar{y} = \frac{1}{2} x e^x$

$\Rightarrow y = y_0 + \bar{y} = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x} + \frac{1}{2} x \cdot e^x$

Troviamo c_1 e c_2.

$$y' = c_1 e^x - c_2 \cdot e^{-x} + \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} x e^x$$

$$0 = y(1) = c_1 \cdot e + c_2 \cdot e^{-1} + \frac{1}{2} e$$

$$\frac{e}{2} = y'(1) = c_1 \cdot e - c_2 \cdot e^{-1} + \frac{1}{2} e + \frac{1}{2} e = c_1 \cdot e - c_2 \cdot e^{-1} + e$$

$$\begin{cases} c_1 \cdot e + c_2 \cdot e^{-1} + \frac{1}{2} e = 0 \\ c_1 e - c_2 e^{-1} + e = \frac{e}{2} \end{cases}$$

Sommo le ~~pri~~ equazioni

$$2 c_1 \cdot e + \frac{3}{2} e = \frac{e}{2} \Rightarrow 2 c_1 \cdot e = -e \quad c_1 = -\frac{1}{2}$$

sostituisco nella 1a equazione

$$-\cancel{\frac{1}{2}}e+C_2\cdot e^{-1}+\cancel{\frac{1}{2}}e=0 \Rightarrow C_2=0$$

Soluzione del problema di Cauchy e'

$$y=C_1e^x+C_2\cdot e^{-x}+\frac{1}{2}xe^x=-\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}x\cdot e^x.$$