Lezione 12-11

Formula di Taylor con resto di Peano:

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$. Se f è derivabile n volte in x_0 e almeno $n-1$ volte in (a,b), allora esiste unico un polinomio $P_n(x)$ di grado $\leq n$ e una funzione $R_n(x)$ tali che: $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$

e $R_n(x)=o((x-x_0)^n)$, cioè $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$.

Il polinomio $P_n(x)$ è della forma:

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}\cdot(x-x_0)^3 + \dots$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k = \underbrace{f(x_0)}_{k=0} + \underbrace{f'(x_0)\cdot(x-x_0)}_{k=1} + \underbrace{\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2}_{k=2} + \dots$$

Osservazione: $P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad \forall\, k = 0, \dots, n$

$R_n(x)$ si dice resto di Peano di ordine n.

$P_n(x)$ si dice polinomio di Taylor di ordine n centrato in x_0.

Formula di Taylor con resto di Lagrange:

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$. Se f è derivabile $n+1$ volte in (a,b), tranne al più x_0, allora $\exists\, z\in(a,b)$ t.c.

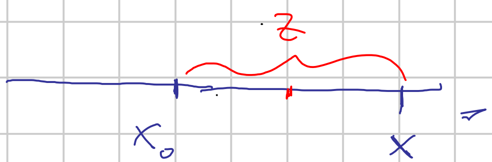
$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}$$ – resto di Lagrange

$$f(x)=P^n(x)+R_n(x)$$

Se $|f^{(n+1)}(z)|<M \ \forall z\in(a,b)$

$$|R_n(x)|\le\left|\frac{M}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^n\right|$$

z è un qualche punto compreso fra x e x_0



Il resto di Lagrange è effettivamente un o-piccolo di $(x-x_0)^n$ per $x \to x_0$

Esempi di sviluppi di Taylor:

$f(x) = \sin x \qquad x_0 = 0 \quad \Rightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(0) = -1$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k =$$

$$P_3(x) = \underbrace{0}_{f(0)} + \underbrace{1}_{f'(0)} \cdot x + \frac{\overbrace{0}^{f''(0)}}{2!} \cdot x^2 + \frac{\overbrace{-1}^{f'''(0)}}{3!} \cdot x^3 = x - \frac{1}{6} x^3$$

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6} x^3 + R_3(x) = \boxed{x - \frac{1}{6} x^3 + o(x^3)}$$

$$= x - \frac{1}{6} x^3 + \underbrace{\frac{\sin(z)}{24} \cdot x^4}_{\text{resto di Lagrange}}$$

$$\left| \frac{\sin(z)}{24} \cdot x^4 \right| \leq \frac{1}{24} \cdot |x|^4$$

Sapevamo che $\operatorname{sen} x = \boxed{x + o(x)}$ $\longrightarrow$ Non sono in contraddizione poiché

$$-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3) = o(x)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots +$$

solo potenze dispari, infatti il seno è una funzione dispari

$P_1(x) = x$ $\quad$ $P_2(x) = x$, pertanto $\operatorname{sen} x = x + o(x^2)$

$P_3(x) = x - \frac{1}{6}x^3$ $\quad$ $\operatorname{sen}(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$

$$\sin x = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot (-1)^k \right) + o(x^{2n+2})$$

– sviluppo di Taylor di grado $2n+2$ di $f(x) = \sin x$ in 0;

Analogamente.

$$\cos x = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \cdot (-1)^k \right) + o(x^{2n+1}) =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$f(x) = e^x \quad f(0) = e^0 = 1$

$f'(x) = e^x \quad f'(0) = e^0 = 1$

$\ldots \quad f^{(k)}(x) = e^x, \; f^{(k)}(0) = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \rightarrow$

$$e^x = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right) + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\ldots$$

$$\log(1+x) = \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \frac{x^k}{k} \right) + o(x^n)$$

↳ non c'è il fattoriale

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$$ → es: trovare la forma generica dello sviluppo.

$$\arctan x = \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right) + o(x^{2n+2}) =$$

$$\underset{k=0}{x} - \underset{k=1}{\frac{x^3}{3}} + \underset{k=2}{\frac{x^5}{5}} - \underset{k=3}{\frac{x^7}{7}} + o(x^8)$$

Binomiale $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha \cdot x + \frac{\alpha \cdot (\alpha-1)}{2} \cdot x^2 + \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2)}{3!} \cdot x^3 + \dots + \dots$$

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} x + \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}-1\right)}{2} x^2 + \dots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} \cdot x^2 + \dots$$

Esempio: calcolo di limiti tramite sviluppi di Taylor.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{e^x - \log(1+x) - 1} \Bigg] - f(x)$$

Potremmo avere

$\frac{x^3}{x^4} \to \pm\infty$ oppure $\frac{x^3}{x^3} \to 1$, $\frac{x^4}{x^3} \to 0$

- $\sin x = x + o(x^2)$
- $e^x = 1 + x + o(x)$
- $\log(1+x) = x + o(x)$

$$f(x) = \frac{o(x^2)}{\cancel{1}+\cancel{x} - \cancel{x} - \cancel{1} + o(x)} = \frac{o(x^2)}{o(x)} \; ?$$

$$\frac{o(x^2)}{o(x)} = \frac{o(x)}{o(1)}$$

Vado avanti col grado dei polinomi:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$f(x) = \frac{\sin x - x}{e^x - \log(1+x) - 1} = \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^4)}{\cancel{1} + \cancel{x} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \left(\cancel{x} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - \cancel{1}} =$$

$$= \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^4)}{x^2 + o(x^2)} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

Oss: $e^x - \log(1+x) - 1$ – proviamo ad aumentare il grado di e^x, ma non quello di $\log(1+x)$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \log(1+x) = x + o(x)$$

$$e^x - \log(1+x) - 1 = \cancel{1} + \cancel{x} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \cancel{x} + o(x) - \cancel{1} = o(x)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)^2 - \sin(x^2)}{x^4}$$

$\sin(t) = t + o(t^2)$, $t = x^2$.

$$\sin(x^2) = x^2 + o(x^4)$$

$$(\sin x)^2 = (x + o(x^2))^2 = x^2 + 2x \cdot o(x^2) + (o(x^2))^2 =$$

$$= x^2 + o(x^3) + o(x^4) = x^2 + o(x^3)$$

$$\frac{(\sin x)^2 - \sin(x^2)}{x^4} = \frac{+\cancel{x^2} + o(x^3) - \cancel{x^2} + o(x^4)}{x^4} = \frac{o(x^3)}{x^4}$$

?

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$(\sin x)^2 = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2$$ — dove compare o-piccolo nei doppi prodotti e nei quadrati?

$x \cdot o(x^4)$ $\quad$ $x^3 \cdot o(x^4)$ $\quad$ $(o(x^4))^2$

$\downarrow$ $\quad$ $\downarrow$ $\quad$ $\downarrow$

$o(x^5)$ $\quad$ $o(x^7)$ $\quad$ $o(x^8)$

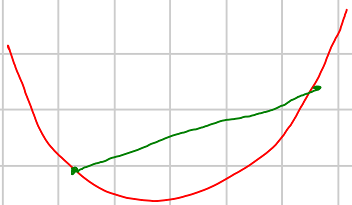
↳ è quello che conta di più → possiamo trascurare tutte le potenze di grado > 5

$$\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)^2 = x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^5)$$

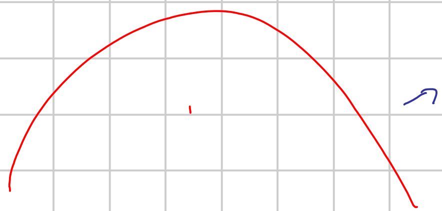
$$\frac{(\sin x)^2-\sin(x^2)}{x^4} = \frac{\cancel{x^2}-\frac{x^4}{3}+o(x^5)-(\cancel{x^2}+o(x^4))}{x^4} =$$

$$= \frac{-\frac{x^4}{3}+o(x^4)}{x^4} \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{3}.$$

Convessità:

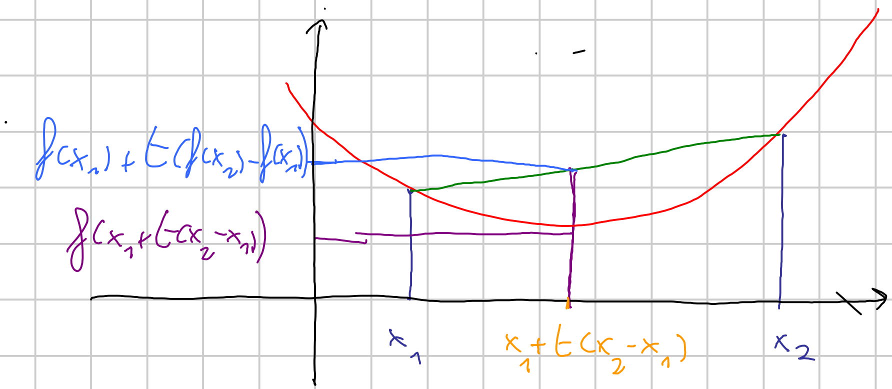


→ funzione convessa



→ funzione concava.

Def: $I \subset \mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$, f si dice convessa se presi 2 punti qualsiasi sul grafico di f, il segmento che li unisce è sopra il grafico di f.



f si dice convessa se $\forall\, x_1, x_2 \in I$ e $\forall\, t \in (0,1)$, vale

$$f(x_1+t(x_2-x_1)) \leq f(x_1)+t(f(x_2)-f(x_1))$$

Se vale $\underset{\neq}{<}$, allora f si dice strettamente convessa.

Def: f si dice concava se $-f$ è convessa.