Lezione 12-12

Principio di sovrapposizione

$y'' + ay' + by = f_1 + f_2$

Se $\bar{y}_1$ soluzione particolare di

$y'' + ay' + by = f_1$

e $\bar{y}_2$ soluzione particolare di

$y'' + ay' + by = f_2$

allora $\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2$ è soluz. part. di $y'' + ay' + by = f_1 + f_2$

Esempio: $y'' + y' - 2y = \underbrace{x}_{f_1} - \underbrace{3\sin x + \cos x}_{f_2}$

Omogenea associata $y'' + y' - 2y = 0$

Pol. caratt. $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

$y_0 = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}$ soluz. generale omogenea

1) Cerco una soluzione particolare $\bar{y}_1$ di

$y'' + y' - 2y = x$

$$X = e^{\alpha x} \cdot \left(p(x)\cos(\beta x) + q(x)\cdot \sin(\beta x) \right)$$

$\alpha = 0, \ \beta = 0, \ p(x) = x, \ q(x) = 0$

$\alpha + i\beta = 0$ non è radice del polinomio caratt. $\Rightarrow m = 0$

grado $(p(x)) = 1$ grado $(q(x)) = 0$

$$\bar{y}_1 = \cancel{e^{\overset{\alpha=0}{\alpha x}}} \left(r(x) \cdot \underset{\overset{1}{\shortparallel}}{\cos}(\beta x) + \cancel{s(x)\cdot \sin(\overset{\beta=0}{\beta x})} \right)$$

$\Rightarrow r(x) = Ax + B \qquad \bar{y}_1 = r(x) = Ax + B$

$\bar{y}_1' = A, \quad \bar{y}_1'' = 0$

Sostituisco in $\bar{y}_1'' + \bar{y}_1' - 2\bar{y}_1 = x$

$$0 + A - 2(Ax + B) = x$$

$$-2Ax + A - 2B = x$$

$$\begin{cases} -2A = 1 & A = -\frac{1}{2} \\ A - 2B = 0 & -\frac{1}{2} - 2B = 0 \quad 2B = -\frac{1}{2} \quad B = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\bar{y}_1 = Ax + B = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$$

Ora cerco $\bar{y}_2$ soluzione di:

$$\bar{y}_2'' + \bar{y}_2' - 2y_2 = \underbrace{-3\sin x + \cos x}_{f_2}$$

$$-3\sin x+\cos x = e^{\alpha x}\left(p(x)\cdot\cos(\beta x)+q(x)\cdot\sin(\beta x)\right)$$

$\alpha=0$, $\beta=1$, $p(x)=1$, $q(x)=-3$

$\alpha+i\beta=i$ non e' radice del pol. caratt $\Rightarrow m=0$

grado(p) = grado $(q)=0$

$\bar{y}_2=\left(r(x)\cdot\cos x+s(x)\cdot\sin x\right)=A\cdot\cos x+B\cdot\sin x$ (r e s sono di grado 0, quindi costanti)

$\bar{y}_2'=-A\cdot\sin x+B\cos x$

$\bar{y}_2''=-A\cos x-B\sin x$

Sostituisco in $\bar{y}_2''+\bar{y}_2'-2\bar{y}_2=-3\sin x+\cos x$

$$-A\cos x - B\sin x + (-A\sin x + B\cos x) - 2(A\cos x + B\sin x) =$$

$$= -3\sin x + \cos x \ldots$$

$$\cos x \cdot (-A + B - 2A) + \sin x(-B - A - 2B) = -3\sin x + \cos x$$

$$\begin{cases} -3A + B = 1 \\ -A - 3B = -3 \end{cases} \qquad B = 1 + 3A$$

$$-A - 3(1+3A) = -3 \rightarrow -10A \cancel{-3} = \cancel{-3}$$

$$-10A = 0 \Rightarrow A = 0 \quad B = 1$$

$$\bar{y}_2 = A \cdot \cos x + B\sin x = \sin x$$

Soluzione generale di $y'' + y' - 2y = x - 3\sin x + \cos x$

$$y_0 + \bar{y}_1 + \bar{y}_2 =$$

$$= \underbrace{c_1 \cdot e^{x} + c_2 \cdot e^{-2x}}_{= y_0} \underbrace{- \frac{x}{2} - \frac{1}{4}}_{= y_1} + \underbrace{\sin x}_{= y_2}$$

Esercizio: Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x \cdot \log x}{(1-\log x)^2}$$

1) Insieme di definizione: $x > 0$ ($\log x$ e' definito per $x > 0$)

Inoltre richiediamo $(1-\log x)^2 \neq 0 \Leftrightarrow 1-\log x \neq 0 \Leftrightarrow \log x \neq 1$

$\Leftrightarrow x \neq e$.

Il dominio di f e' $(0,e)\cup(e,+\infty)$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\log x}{(1-\log x)^2} = \frac{0}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\cdot\log x = \lim_{t\to -\infty} e^t\cdot t = \lim_{u\to +\infty} e^{-u}\cdot(-u) = \lim_{u\to +\infty} \frac{u}{e^u} = 0$$

$\log x = t$ $\quad t = -u$

$x = e^t$

$x\to 0^+ \Rightarrow t\to -\infty$

$$\lim_{x\to e} f(x) = \lim_{x\to e} \frac{x\log x}{(1-\log x)^2} = \frac{e}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\log x}{(1-\log x)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\log x}{1-2\log x+\log^2 x}=\frac{x\cdot\cancel{\log x}}{\log^{\cancel{2}} x\,\underbrace{\left(\frac{1}{\log^2 x}-\frac{2}{\log x}+1\right)}_{\downarrow\ 1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\log x}=+\infty$$

- La funzione f <u>non</u> ha asintoto verticale in $x=0$, ma ha un asintoto verticale in $x=e$  .

- Non ci sono asintoti orizzontali. Potrebbe a priori avere un asintoto obliquo. Per vedere se c'è, calcoliamo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{(1-\log x)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x \sim \log x}{\log x^2-2\log x+1 \sim\sim \log^2 x}=0 \qquad \to 0 \sim \frac{1}{\log x}$$

- Non ci sono asintoti obliqui.

Derivata $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ $\quad f'(x) = \dfrac{g'(x)\cdot h(x) - g(x)\cdot h'(x)}{h^2(x)}$

$$f(x) = \frac{x\cdot \log x}{(1-\log x)^2} \qquad g(x) = x\cdot \log x \qquad h(x) = (1-\log x)^2$$

$$f'(x) = \frac{(\log x + 1)(1-\log x)^2 + \cancel{x}\log x \cdot 2(1-\log x)\cdot \frac{1}{\cancel{x}}}{(1-\log x)^4} =$$

$$= \frac{\cancel{(1-\log x)}\left[(1+\log x)(1-\log x) + 2\log x\right]}{(1-\log x)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{1-\log^2 x + 2\log x}{(1-\log x)^3}$$

Studiamo il segno della derivata

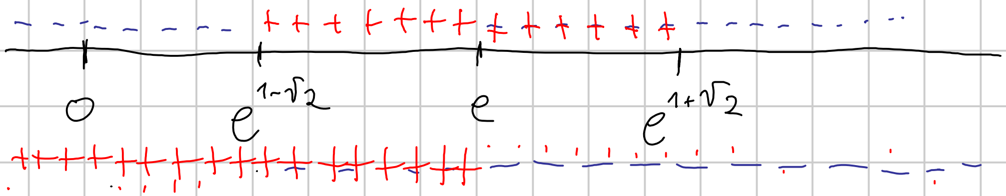
$(1-\log x)^3 > 0 \iff 1-\log x > 0 \iff \log x < 1 \iff x < e$

$1-\log^2 x+2\log x \geq 0$ poniamo $\log x = t$ $\quad x = e^t$

$1 - t^2 + 2t \geq 0 \iff 1-\sqrt{2} \leq t \leq 1+\sqrt{2} \iff 1-\sqrt{2} \leq \log x \leq 1+\sqrt{2}$

$\iff e^{1-\sqrt{2}} \leq x \leq e^{1+\sqrt{2}}$

Combinando il segno di numeratore e denominatore



$- \; - \; - \; - \; - \;|\; + \; + \; + \; + \; + \; + \; + \;|\; - \; - \; - \; - \;|\; + \; + \; + \; + \; + \; + \; + \; + \; + \; +$

minimo locale minimo locale

La funzione $f(x)$ è decrescente in $(0, e^{1-\sqrt{2}}]$, crescente in $[e^{1-\sqrt{2}}, e]$, decrescente in $[e, e^{1+\sqrt{2}}]$, crescente in $[e^{1+\sqrt{2}}, +\infty)$

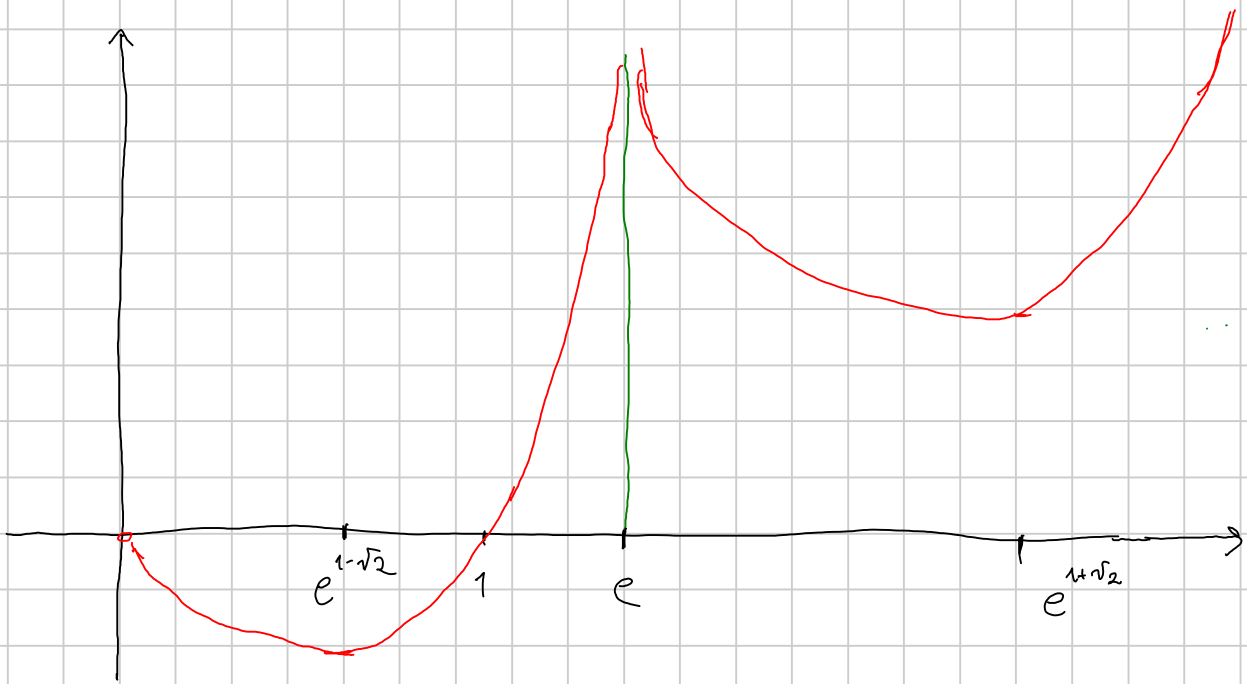
I punti $x = e^{1-\sqrt{2}}$ e $x = e^{1+\sqrt{2}}$ sono minimi locali

$$f(e^{1-\sqrt{2}}) = \frac{e^{1-\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})}{2} \qquad f(e^{1+\sqrt{2}}) = \frac{e^{1+\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})}{2}$$

$$\left(1 - \log_e(1-\sqrt{2})\right)^2 = \left(1 - 1 + \sqrt{2}\right)^2 = 2$$

Il punto $x = e^{1-\sqrt{2}}$ è anche un minimo assoluto.

$$\Rightarrow \min(f) = \frac{e^{1-\sqrt{2}} \cdot (1-\sqrt{2})}{2}$$



$$\int_0^1 \frac{\arctan(e^x)}{e^x+e^{-x}} \cdot dx = \int_1^e \frac{\arctan(t)}{t+\frac{1}{t}} \cdot \frac{1}{t} \cdot dt$$

Effettuo la sostituzione $e^x = t$ $(x = \log t)$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$$

$$\frac{dt}{dx} = e^x \quad dt = e^x \cdot dx$$

$$t \cdot dx \quad \frac{dt}{t} = dx$$

$x = 0$ $\quad t = e^0 = 1$

$x = 1$ $\quad t = e^1 = e$

$t = t(x)$ estremi di integrazione sono $x = 0$ e $x = 1$

Calcolo quanto vale t per $x = 0$ e $x = 1$ e questi valori diventano i nuovi estremi di integrazione

$$\int_1^e \frac{\arctan t}{t+\frac{1}{t}} \cdot \frac{1}{t} \cdot dt = \int_1^e \frac{\arctan t}{t^2+1} \cdot dt \;\; *$$

Cambio di variabile $\arctan t = z \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{1}{t^2+1} \Rightarrow dz = \frac{1}{t^2+1} \cdot dt$

$$* = \int_{\pi/4}^{\arctan e} z \cdot dz = \frac{z^2}{2}\Bigg|_{\pi/4}^{\arctan e} = \frac{(\arctan e)^2}{2} - \frac{\pi^2}{32}$$

$t = 1 \Rightarrow z = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

$t = e \Rightarrow z = \arctan(e)$