Lezione 13-12

Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \dfrac{y}{\sqrt{x}} = 1 \\ y(1) = \dfrac{e^2+2}{2e^2} \end{cases}$$

Determinare il minimo di $y(x)$.

Riscriviamo l'equazione come

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot y + 1 = a(x) \cdot y + b(x) \quad \text{con } a(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}}, \quad b(x) \equiv 1$$

Cerchiamo una primitiva $A(x)$ di $a(x)$.

$A(x) = \int -\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot dx \qquad A(x) = -2\sqrt{x}$

$$\parallel$$

$$-\int x^{-\frac{1}{2}} \cdot dx = -\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = -2\, x^{\frac{1}{2}}.$$

Calcoliamo $\int e^{-A(x)} \cdot b(x) \cdot dx = \int e^{2\sqrt{x}} \cdot dx \quad *$

Poniamo $t = \sqrt{x}$, $x = t^2$, $\frac{dx}{dt} = 2t \Rightarrow dx = 2t \cdot dt$

$$* \int \underbrace{e^{2t}}_{f} \cdot \underbrace{2t}_{g} \cdot dt = \cancel{\frac{1}{2}} e^{2t} \cdot \cancel{2}t - \int \cancel{\frac{1}{2}} e^{2t} \cdot \cancel{2} \cdot dt =$$

$$= e^{2t} \cdot t - \frac{e^{2t}}{2} + c = e^{2\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} - e^{2\sqrt{x}}/2 + c$$

$$y(x) = e^{A(x)} \cdot \left(\int e^{-A(x)} \cdot b(x) \cdot dx + c \right) =$$

$$e^{-2\sqrt{x}} \cdot \left(\sqrt{x} \cdot e^{2\sqrt{x}} - \frac{e^{2\sqrt{x}}}{2} + c \right) = \sqrt{x} - \frac{1}{2} + c \cdot e^{-2\sqrt{x}}.$$

Risolviamo il problema di Cauchy. Determiniamo c dalla condizione iniziale $y(1) = \frac{e^2+2}{2e^2}$.

Sostituiamo $y = \frac{e^2+2}{2e^2}$, $x = 1$

$$\frac{e^2+2}{2e^2} = y(1) = 1 - \frac{1}{2} + c \cdot e^{-2} \qquad \frac{e^2+2}{2e^2} - \frac{1}{2} = \frac{c}{e^2}$$

$$c = \left(\frac{e^2+2}{2e^2} - \frac{1}{2}\right)\cdot e^2 = \cancel{\frac{e^2}{2}} + 1 - \cancel{\frac{e^2}{2}} = 1$$

La soluzione del problema di Cauchy e'

$$y(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{2} + e^{-2\sqrt{x}}.$$

Cerchiamo il minimo di $y(x)$ studiando la derivata $y'(x)$

$$y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + e^{-2\sqrt{x}}\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \frac{1-2e^{-2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

$$y'(x) = -\frac{y}{\sqrt{x}} + 1.$$ Possiamo sostituire a $y(x)$ la sua espressione come funzione di x

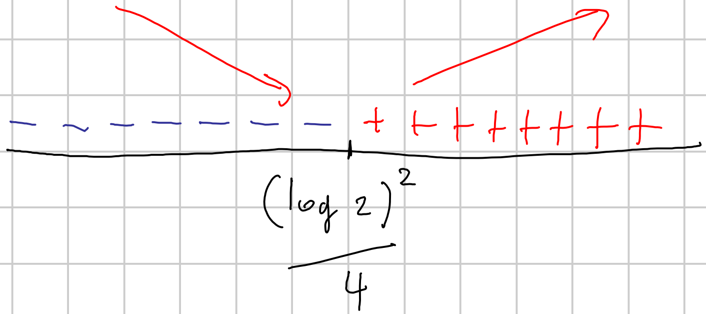
$$y'(x) = -\frac{\sqrt{x} - \frac{1}{2} + e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} + 1 = \frac{-\cancel{\sqrt{x}} + \frac{1}{2} - e^{-2\sqrt{x}} + \cancel{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \frac{1 - 2e^{-2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

$\to > 0$

$$y'(x) \geq 0 \iff 1 - 2 \cdot e^{-2\sqrt{x}} \geq 0 \iff -2 \cdot e^{-2\sqrt{x}} \geq -1 \iff$$

$$e^{-2\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2} \iff -2\sqrt{x} \leq \log\left(\frac{1}{2}\right) \iff \sqrt{x} \geq -\frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{2} \iff$$

$$x \geq \left(\frac{\log(2)}{2}\right)^2 \iff x \geq \frac{(\log 2)^2}{4}$$



Il punto $x_0 = \frac{(\log 2)^2}{4}$ e' un punto di minimo assoluto.

Il minimo di $y(x)$ e' quindi $y(x_0)$

$$y\left(\frac{\log^2 2}{4}\right) = \frac{\log 2}{2} - \frac{1}{2} + e^{-\cancel{2}\frac{\log 2}{\cancel{2}}} = \frac{\log 2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\log 2}{2}$$

Esercizio:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}+\log(n+1)-\log n\right)^n = (1+\infty-\infty)^{\infty}$$

>1 $\quad$ >0

$$\left(\frac{n+1}{n}+\log(n+1)-\log n\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}+\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)^n =$$

0 o non possiamo usare questo

$$= \left(1+\frac{1}{n}+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^n =$$

$\log(1+x) = x+o(x) \quad x\to 0$

$\frac{1}{n}\to 0$ per $n\to+\infty$

$$= \left(1+\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n}\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = \left(1+\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n =$$

$$= e^{n\cdot\log\left(1+\boxed{\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}\right)} = e^{n\cdot\left(\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^2.$$

$\underset{x}{\shortparallel}$ $\quad$ $\to 2$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+n)-n}{n^2} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \int_x^{1/x} e^{t+1} \cdot dt = \lim_{x\to-\infty} F(x)$$

$$F(x) = \int_x^{1/x} e^{t+1} \cdot dt$$

$$\int e^{t+1} \cdot dt = e^{t+1} + C$$

$$\int_x^{1/x} e^{t+1} \cdot dt = \left[e^{t+1} \right]_x^{1/x} = \boxed{e^{\frac{1}{x}+1} - e^{x+1}} = F(x)$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x}+1} - e^{x+1} = e^{\frac{1}{-\infty}+1} - e^{-\infty+1} = e^{0+1} - e^{-\infty} = e - 0 = e$$

$$6) \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^5} \cdot \int_0^x 1-\cos(t^2) \cdot dt = \lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x 1-\cos(t^2) \cdot dt}{x^5} = \frac{0}{0}$$

de L'Hôpital

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^x 1-\cos(t^2) \cdot dt \right) = 1-\cos(x^2)$$

Calcoliamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{5x^4} =$$

1° modo ripetere de L'Hôpital fino a che esce una forma non indeterminata.

2° modo (+ furbo)

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)$$

$$= \frac{1-\left(1-\frac{1}{2}x^4+o(x^6)\right)}{5x^4} = \frac{\frac{1}{2}x^4+o(x^6)}{5x^4} \ast = \frac{1}{10}$$

$$\ast \quad \frac{x^4+o(x^6)}{10\,x^4} = \frac{\cancel{x^4}\left(1+\frac{o(x^6)}{x^4}\right)}{10\,\cancel{x^4}} = \frac{1}{10}$$

7) $a_n = \log(n^2+1) - n$ limitata? Sup? Inf?

$$\lim_{n\to+\infty} a_n$$

$$\log(n^2+1) - n = -n\cdot\left(\frac{\log(n^2+1)}{-n} + 1\right) \sim -n\left(\frac{2\log n}{-n} + 1\right) = -\infty$$

$$\underbrace{\left(\frac{\overset{\to 0}{2\log n}}{-n} + 1\right)}_{\to 1}$$

$$\log(n^2+1) = \log\left(n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right) = \log(n^2) + \log\left(1+\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= 2\cdot\log n + \underbrace{\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}_{\to 0} \sim 2\log n$$

$p(x)$ pol. di grado n

$$\log(p(x)) \underset{x\to+\infty}{\sim} n\cdot\log x$$

$a_n = \log(n^2+1) - n$ $\quad \lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \Rightarrow$ 1) a_n non è inferiormente limitata.

2) a_n ha massimo.

$a_n = \log(n^2+1) - n$

$f(x) = \log(x^2+1) - x$

segno num.

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - 1 = \frac{2x - x^2 - 1}{x^2+1} \quad x^2+1 \to > 0$$

$$-x^2+2x-1 \geq 0 \qquad -(x-1)^2$$

radici

$f' < 0 \Rightarrow$ la succ. a_n è decrescente

$\max a_n = a_0 = \log 1 = 0$

$$a_n = \frac{3^n - 3^{n\log n}}{n^n} \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n$$

$$3^{n\log n} = e^{\log(3^{n\log n})} = e^{n\log n \cdot \log 3} = \left(e^{\log n}\right)^{n\log 3} = n^{n\log 3}$$

$$\frac{3^n - 3^{n\log n}}{n^n} = \frac{3^n}{n^n} - \boxed{\frac{n^{n\log 3}}{n^n}} = \frac{3^n}{n^n} - \boxed{n^{\boxed{n\log 3 - n}}} = -\infty$$

$\frac{n^{n\log 3}}{n^n} \to +\infty$ $\quad \frac{3^n}{n^n} \to 0$

$n\log 3 - n = n(\log 3 - 1)$ $\quad (c>0)$

$n^{n(\log 3-1)} \to +\infty$

Criterio della radice per $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3^{n\log n}}{n^n}$

$$\sqrt[n]{\frac{3^{n\log n}}{n^n}} = \frac{3^{\log n}}{n} = \frac{e^{\log n \cdot \log 3}}{n} = \frac{n^{\log 3}}{n} \to +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{3^{n\lg n}}{n^n} = +\infty$$