Lezione 14-11

Nuovo orario mentoring.

Lunedì : uguale

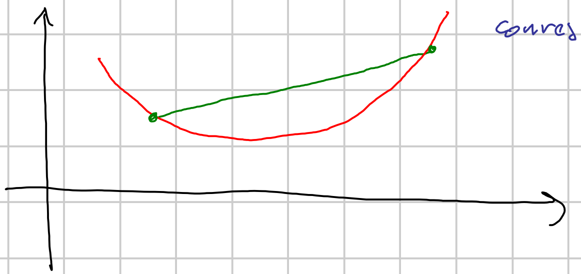
Giovedì no

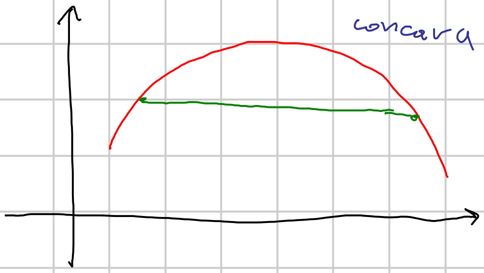
Martedì : 14-16.

Def: $f: I \to \mathbb{R}$, f si dice convessa in I se, presi

due punti qualsiasi sul grafico di f, il segmento che li unisce

è sopra il grafico.

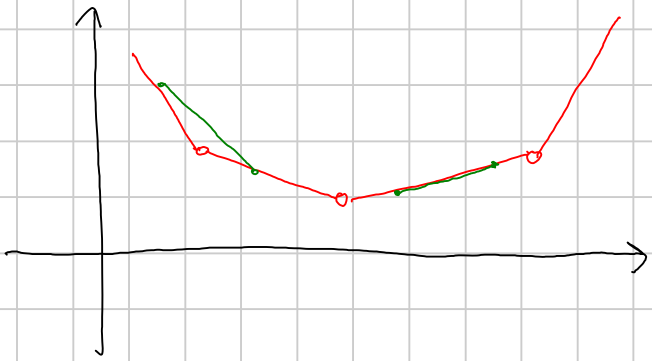




Oss: Una retta è contemporaneamente concava e convessa.

Tuttavia non è né strettamente concava, né strettamente convessa.

Oss. Se f è strettamente convessa, allora ~~il~~ segmento ~~che~~ che unisce due punti del grafico "tocca" il grafico solo negli estremi.



→ convessa non strettamente.

Esempi: $f(x) = \sin x$ $f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ f non è né concava né convessa in $[0, 2\pi]$

Oss: f è concava in $[0,\pi]$ e convessa in $[\pi, 2\pi]$.

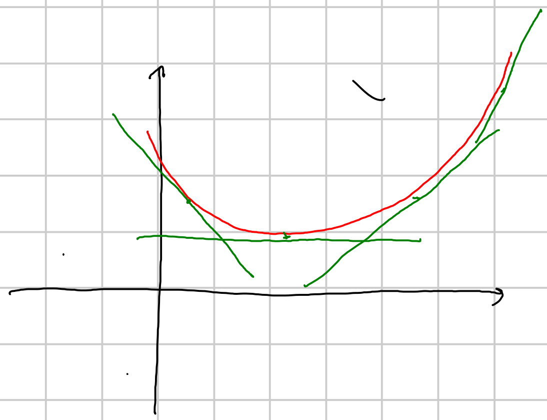
Prop: $I \subset \mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile due volte.

Sono equivalenti:

1) f è convessa (debolmente)

2) f' è debolmente crescente

3) $f'' \geq 0$

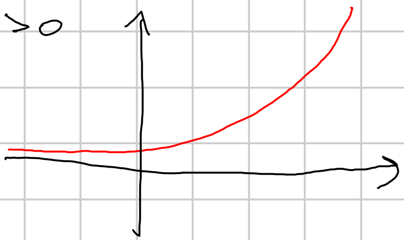


Es: $f(x) = x^2$ $\quad f'(x) = 2x$ $\quad f''(x) = 2 > 0$

$\Rightarrow f$ è ovunque convessa

$f(x) = e^x, \quad f'(x) = e^x, \quad f''(x) = e^x > 0$

$\Rightarrow f$ è convessa.



∘ $f(x) = \log x, \quad x > 0$

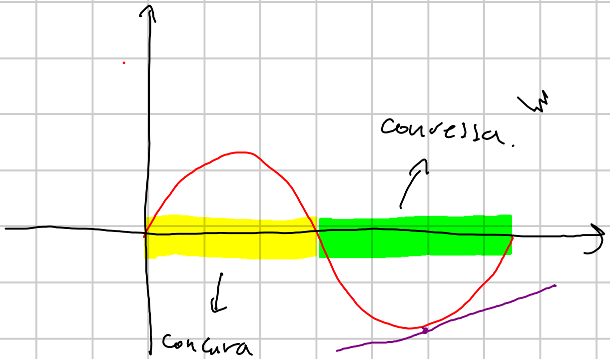
$f'(x) = \dfrac{1}{x}$ → è decrescente per $x > 0$ (condizione 2 della prop. precedente)

$f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow f$ è concava

Es: $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin(x)$. f'' cambia segno.

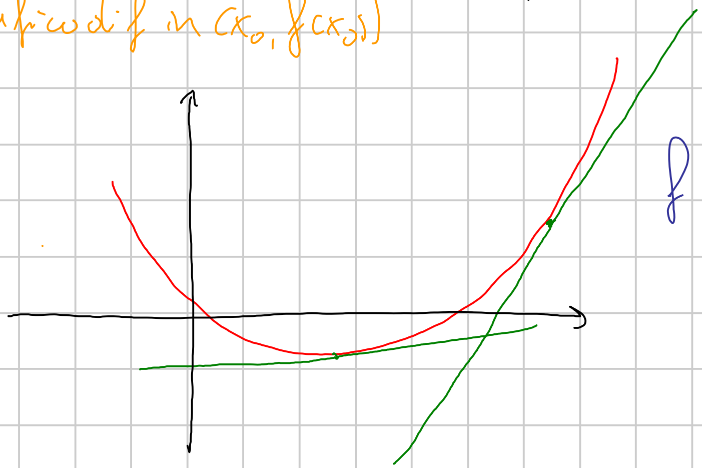
$f''(x) \leq 0$ se $x \in [0, \pi]$

$f''(x) \geq 0$ se $x \in [\pi, 2\pi]$

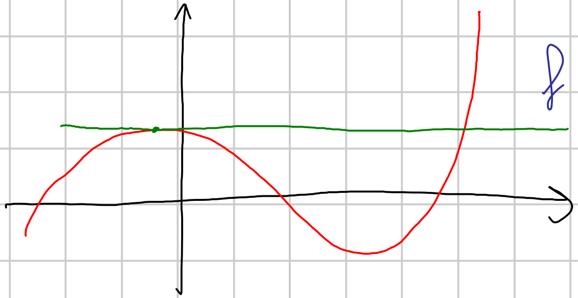


Prop: $I \subset \mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile. f è convessa in I se $\forall x_0 \in I$ il grafico di f è sopra la tangente tracciata nel punto di ascissa x_0, cioè

$$f(x) \geq \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)}_{\text{retta tangente al grafico di } f \text{ in } (x_0,\, f(x_0))}, \quad \forall\, x, x_0 \in I$$



f convessa



f non convessa.

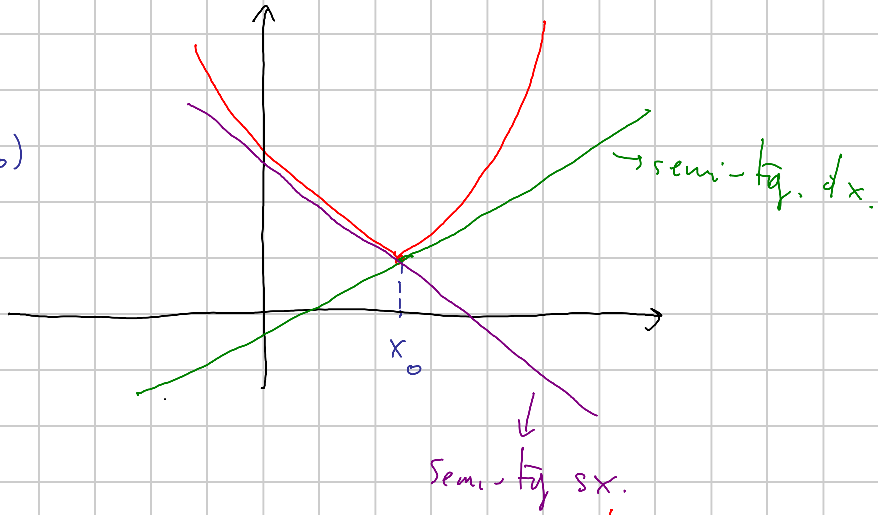
Prop: $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo. Supponiamo che in ogni punto di I f sia derivabile a destra e a sinistra (con derivate non necessariamente uguali tra loro). Allora f è convessa se in ogni punto di I, il grafico di f è sopra le semi-tangenti a destra e a sinistra, cioè

- $f(x) \geq f(x_0) + f'_+(x_0) \cdot (x - x_0)$ → semi-tangente destra
- $f(x) \geq f(x_0) + f'_-(x_0) \cdot (x - x_0)$ → semi-tangente sinistra

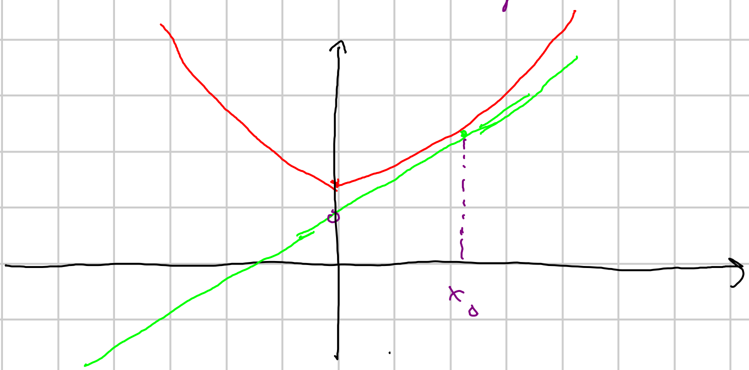
$\forall x, x_0 \in I$

Oss:

$f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$



Es: $f(x) = e^{|x|}$



f è pari

$$f(x) = \begin{cases} e^{x} & \text{se } x \geq 0 \\ e^{-x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

È convessa? Se $x_0 \neq 0$, allora f è derivabile e il grafico della funzione sta sopra la tangente. Perché?

Prendiamo $x_0 > 0 \Rightarrow f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x > 0$

$\Rightarrow f$ è convessa su $[0, +\infty) \Rightarrow$ sicuramente $e^x >$ tangente $\forall x \geq 0$.

L'altra metà del grafico è sopra la tangente? Sì poiché la retta tangente al grafico interseca l'asse y sotto il punto $(0, 1)$ e la metà sinistra del grafico è tutta > 1.

Stessa cosa se $x_0 < 0$

Resta solo $x_0 = 0$. $f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$.

Infatti f e' continua in $x_0 = 0$.

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} e^x = 1$$

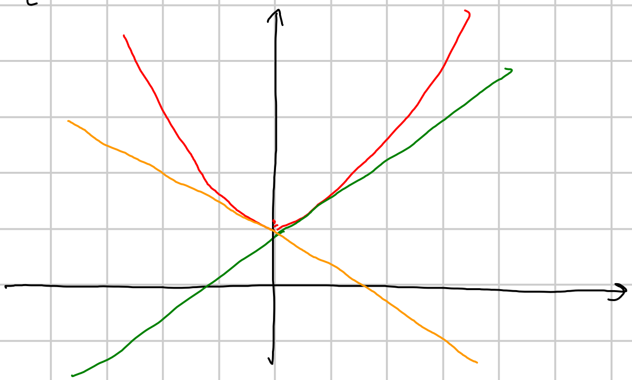
$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} -e^{-x} = -1.$$

Semitangente destra in $x_0 = 0$ e'

$y = 1 + x$

Semitangente sx in $x_0 = 0$

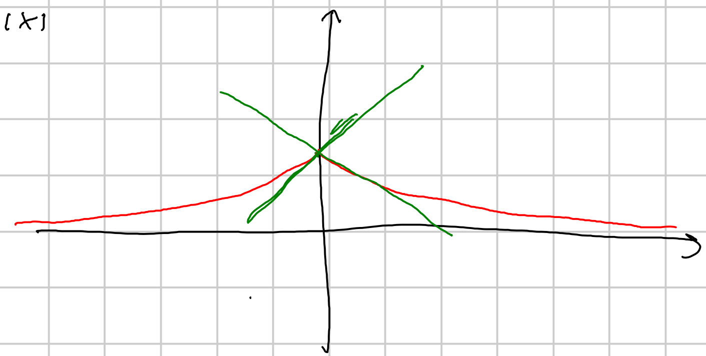
$y = 1 - x$



$$\left.\begin{array}{l} f(x) \geq 1+x \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ f(x) \geq 1-x \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ è convessa su tutto } \mathbb{R}$$

Es: $f(x) = e^{-|x|}$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x>0 \\ e^{x} & x<0 \end{cases}$$



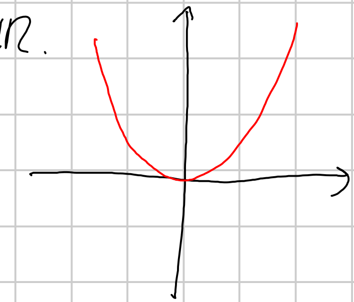
Su $x \neq 0$ $\quad f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{se } x>0 \\ e^{x} & \text{se } x<0 \end{cases} \qquad f''(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x>0 \\ e^{x} & \text{se } x<0 \end{cases}$

f non è convessa in $\mathbb{R}$ (non verificata la condizione sulle semitangenti in $x_0=0$).

Però f è convessa in $(-\infty,0]$ e in $[0,+\infty)$ (Criterio del segno di f'').

Es: $f(x)=x^4$ è convessa? SI

$f'(x)=4x^3$, $f''(x)=12x^2\geq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$.



Es: $f(x)=x^3$ $\quad f'(x)=3x^2$

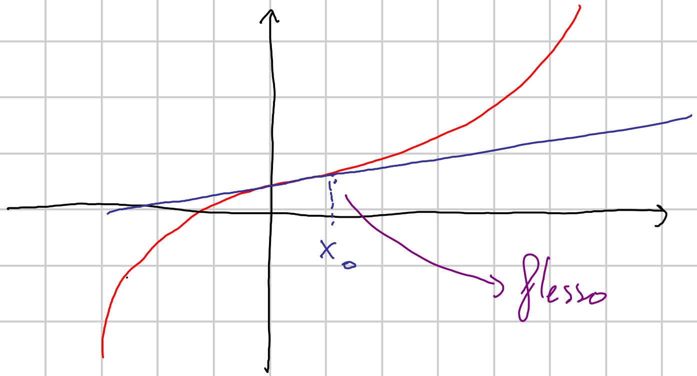
$f''(x)=6x \quad 6x\geq 0$ se $x\geq 0$

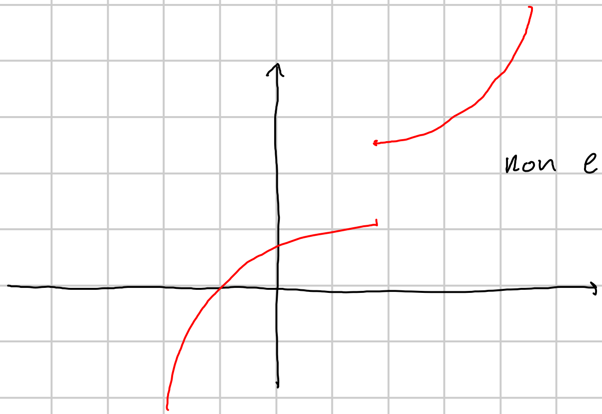
$f''(x) = 6x \le 0$ se $x \le 0$ $\quad$ f è convessa in $[0, +\infty)$

concava in $(-\infty, 0]$

Punto di flesso

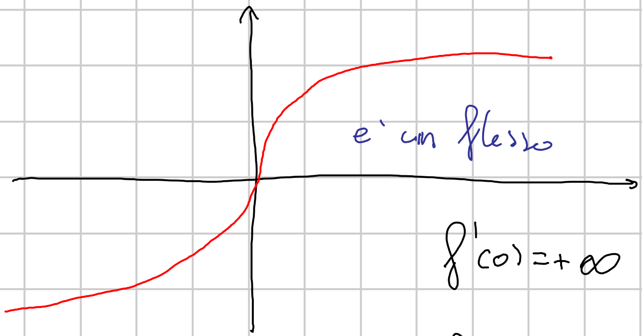
Def: Se f è continua in x_0, se esiste $f'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$ (non nec. finita) e f è convessa in un intorno destro di x_0 e concava in un intorno sinistro di x_0 (o viceversa) allora x_0 si dice punto di flesso per f.





non e' flesso.

non e' un flesso
(un punto angoloso, non ha derivata).



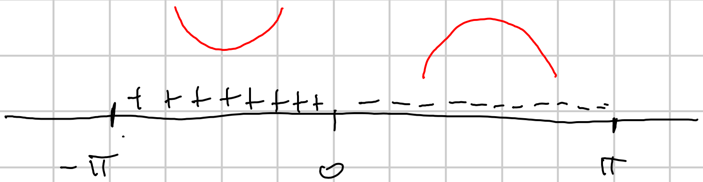
$f'(0) = +\infty$

Es: $f(x) = \sqrt[3]{x}$

è continua e $f'(0) = +\infty$

Es: $f(x) = \sin x$. $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$

$f'(0) = 1$



$\Rightarrow x = 0$ è punto di flesso.

Oss: Se f è derivabile due volte in x_0 e x_0 è punto di flesso,
allora $f''(x_0)=0$

È una condizione necessaria ma non sufficiente.

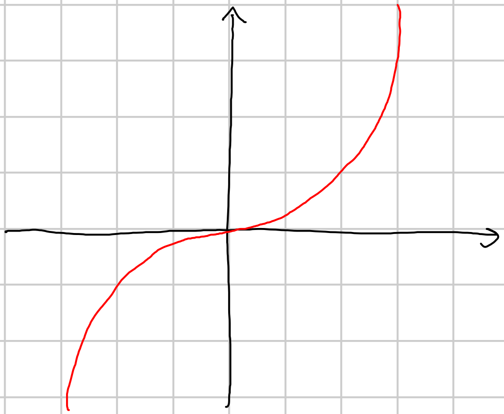
Es: $f(x)=x^4$, $f'(x)=4x^3$, $f''(x)=12x^2$.

$f''(0)=0$, ma $x_0=0$ non è un punto di flesso

Segno di f'' è ovunque ≥ 0.

Possono esistere flessi dove non esiste la derivata seconda:

Es: $f(x) = x \cdot |x|$



$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

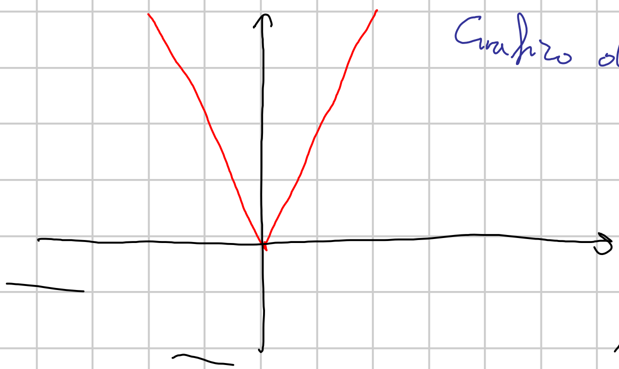
Se $x>0$ $f'(x) = 2x$ $f''(x) = 2$ → convessa

Se $x<0$ $f'(x) = -2x$ $f''(x) = -2$ → concava.

f è continua in $\mathbb{R}$.

$f'_+(0)=0 \quad f'_-(0)=0 \Rightarrow f'(0)=0 \Rightarrow f$ ha un flesso in $x_0=0$.

f non e' derivabile 2 volte in $x_0=0$.



f' non e' derivabile in $x_0=0$.

Grafico di f''