Lezione 17-09

Leone.slavich@unipi.it

pagina personale: people.dm.unipi.it/slavich

Pagina web attiva a breve

Ricevimento: Martedì 15-18 → previa mail.

Acerbi-Buttazzo Analisi Matematica ABC

Insiemi numerici:

$\mathbb{N}$ numeri naturali = "interi positivi compreso lo 0"

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z}$ numeri interi sia positivi che negativi

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Q}$ numeri razionali "frazioni".

numeri della forma p/q, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$

$p \to$ numeratore

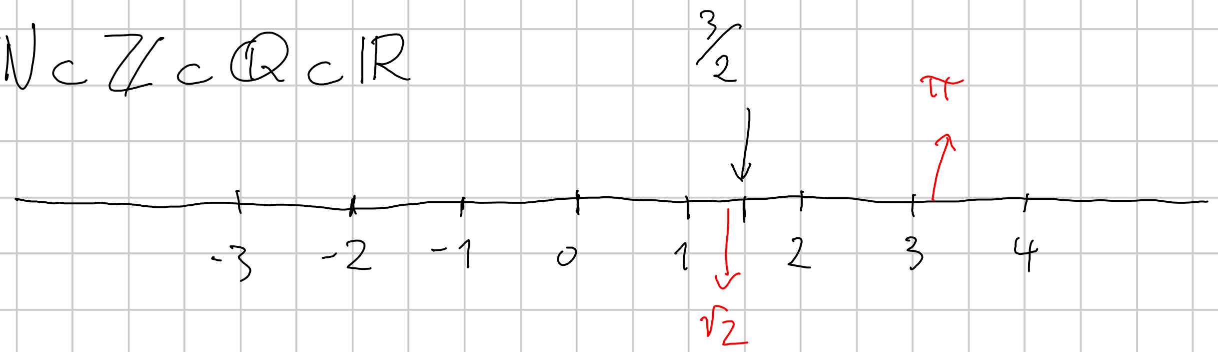
$q \to$ denominatore

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{8} \qquad \frac{3}{4} = \frac{6}{8} \qquad \frac{0}{1} = \frac{0}{n} \quad \forall n \neq 0$$

L'espressione di un numero razionale come rapporto di numeri interi <u>non</u> è unica.

- $\mathbb{R}$ = numeri reali $\mathbb{R}$ contiene $\mathbb{Q}$ e molto altro, ad esempio $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$, π, e

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$



Prop: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

↳ L'unico numero reale positivo x tale che $x^2 = 2$.

Dimostriamo che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ per assurdo. → Neghiamo la tesi e cerchiamo di giungere a una contraddizione.

Supponiamo per assurdo che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$,

pertanto $\exists\, p, q \in \mathbb{Z}$ tali che

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ $(q \neq 0$, supponiamo inoltre $p, q \in \mathbb{N}$ non nulli$\}$

$*$

Possiamo supporre che p e q non siano entrambi pari.

Da $*$ $2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2 \cdot q^2 \Rightarrow p^2$ è un numero pari

esiste

$\Rightarrow p$ è pari $\Rightarrow \exists\, m \in \mathbb{N}$ t.c. $p = 2 \cdot m \Rightarrow p^2 = 4 \cdot m^2$

Poiché $p^2 = 2 \cdot q^2$, allora $\cancel{4}^{2} \cdot m^2 = \cancel{2} \cdot q^2 \Rightarrow 2 \cdot m^2 = q^2$.

$\Rightarrow q^2$ è un numero pari $\Rightarrow q$ è pari. Assurdo perché avevamo supposto che p e q non fossero entrambi pari.

!

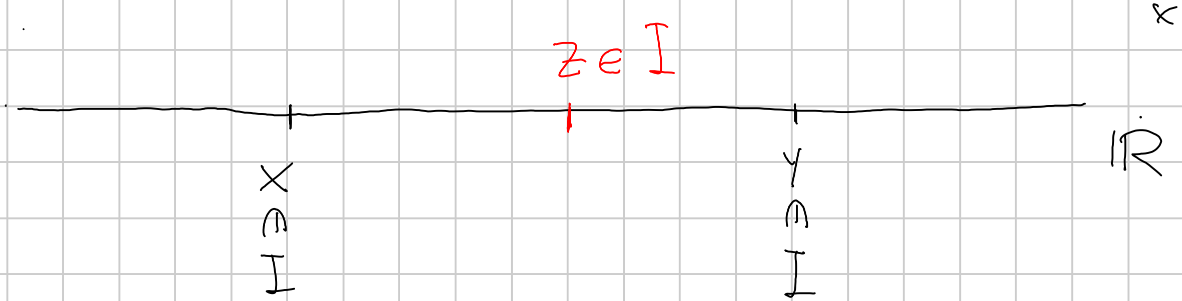
$\exists$ = "esiste" $\forall$ = "per ogni" $\exists!$ = "esiste un unico"

$$\sqrt{2} = \frac{2p}{2\cdot q} = \frac{p}{q}$$

∘ Intervallo di $\mathbb{R}$.

Def: $I \subset \mathbb{R}$ si dice <u>intervallo</u> se $\forall\, x, y \in I$ con $x < y$, dato $z \in \mathbb{R}$ $x < z < y$, risulta che $z \in I$

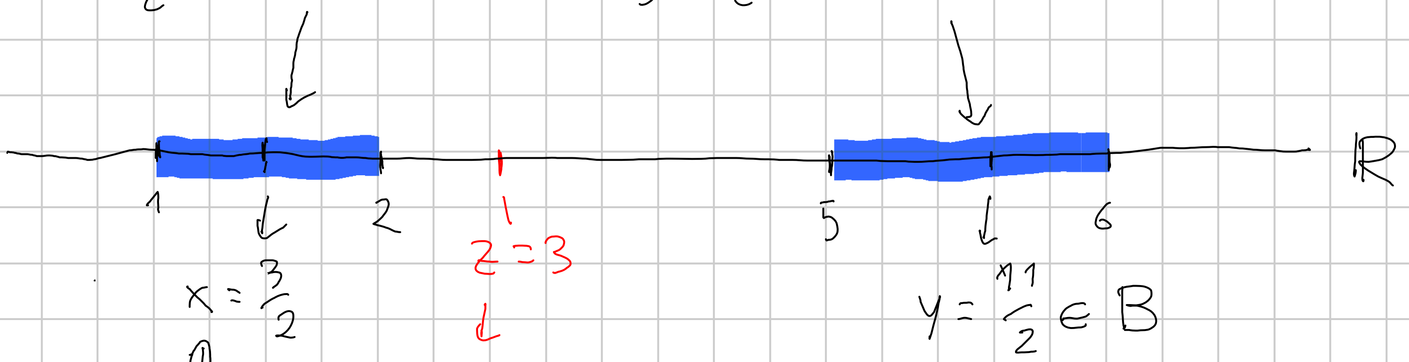
(sottointendo $x \neq y$).



Esempi: $A = \{x \in \mathbb{R} : 3 \leq x \leq 4\}$

comunque prenda z qui, z è compreso fra 3 e 4 e quindi sta in A.

$B = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x < 2\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 5 < x \leq 6\}$



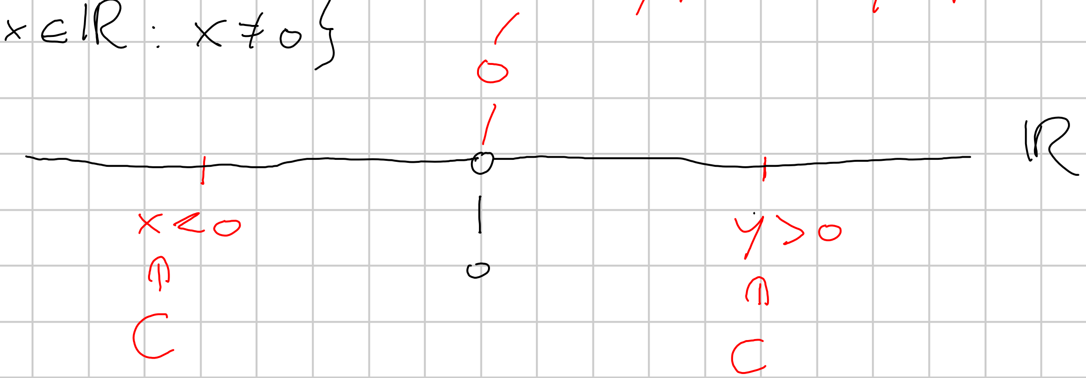
$x < z < y$, ma $z \notin B$

Pertanto B non è un intervallo.

Esercizio: dato $x \in \mathbb{R}$, l'insieme contenente solo x ($\{x\}$) è un intervallo.

$$G = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$$

$x < 0 < y$, ma $0 \notin G$



Notazione: $a, b \in \mathbb{R}$, $a<b$.

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ = "intervallo chiuso" (di estremi a e b).

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ = "intervallo aperto" (di estremi a e b).

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$ - semiretta chiusa

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ - semiretta aperta.

$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$

$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$

$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ Sono tutti intervalli di $\mathbb{R}$.

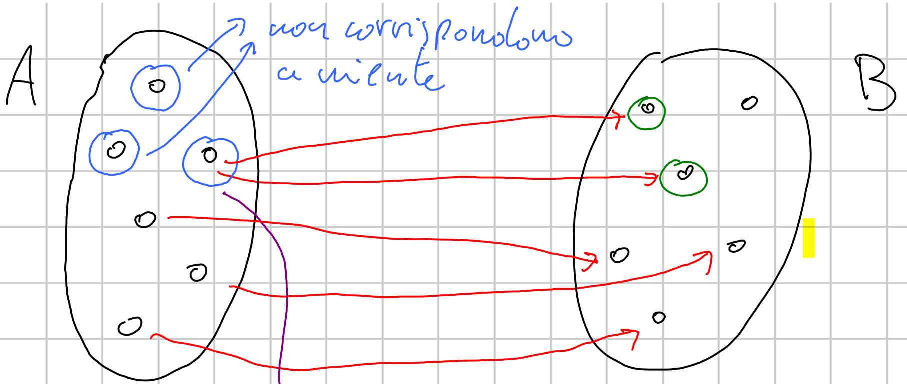
Funzioni: Una funzione è un oggetto matematico definito da una terna di oggetti:

1) Un insieme A = dominio della funzione

2) Un insieme B = codominio della funzione

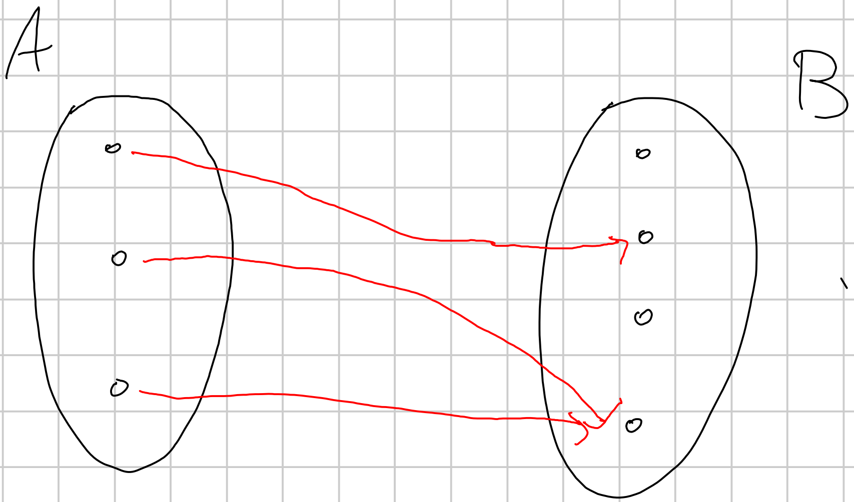
3) f è una legge che mette in corrispondenza ogni elemento del dominio con un unico elemento del codominio

$f: A \to B$



Questa non è una funzione.

A un elemento di A corrispondono due elementi di B



È una funzione.

Grafico di $f : A \to B$.

$\mathrm{graph}(f) = \{ (a, b) \in A \times B \text{ t.c. } b = f(a) \}$

Esempio: $A, B = \mathbb{R}$.

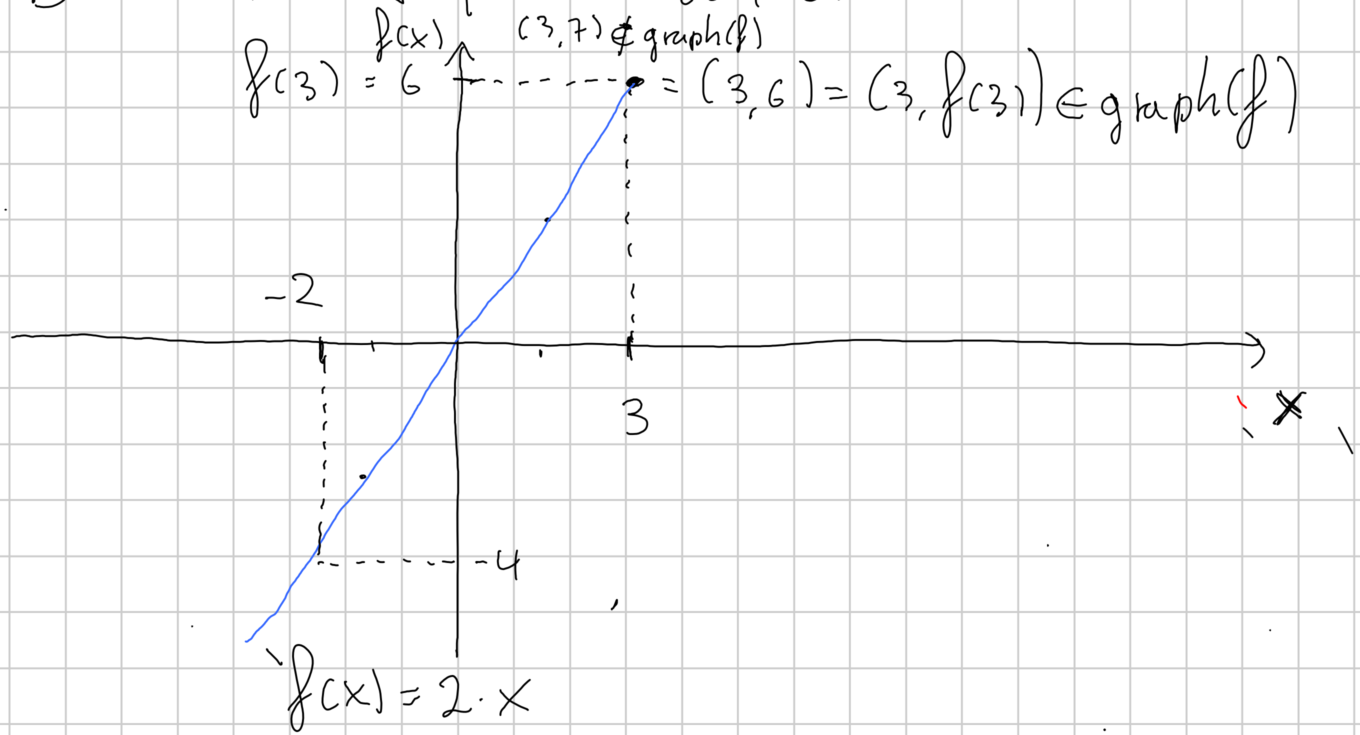
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$.

$\mathrm{graph}(f) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

- $(3, 6) \overset{?}{\in} \mathrm{graph}(f)$ si poiché $6 = f(3) = 2 \cdot 3$
- $(3, 7) \overset{?}{\in} \mathrm{graph}(f)$ no poiché $7 \neq f(3) = 6$

∘ $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, $f: A \to B$ $f(x) = 2 \cdot x$.

$A \times B = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ piano euclideo.



Def: $f: A \to B$. Consideriamo $D \subset A$

$f(D) = \{ f(a) : a \in D \}$ si dice immagine di D attraverso f. (Notare che $f(D) \subset B$)

↳ L'immagine di $D \subset A$ è un sottoinsieme di B (codominio)

Es: $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$

$D = [1, 3]$ $f(D) = [1, 9]$

Def: $f: A \to B$, si definisce immagine di f (e si denota con $Imm(f)$)

l'immagine di A $\quad Imm(f) = \{ b \in B \mid b = f(a) \}$.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = x^2. \quad Imm(f) = [0, +\infty)$