Lezione 17-10

$f, g : A \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in Acc(A)$

Def: Si dice che f e' o-piccolo di g per $x \to x_0$ se $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Si scrive $f(x) = o(g(x))$

Esempio: $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$, $x_0 = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to 0} x = 0 \Rightarrow x^3 = o(x^2)$$

Se non è specificato diversamente si intende $x \to 0$.

Def: Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ si dice che una funzione f è infinitesima di ordine superiore ad α se $f = o(x^{\alpha})$ per $x \to 0$

cioè $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^{\alpha}} = 0$

Es: $f(x) = tg(x) \cdot \sin(x)$ $\quad f(x) = o(x)$ – $f(x)$ è infinitesima di ordine superiore a 1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg(x)\cdot \sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{tg(x)}_{\downarrow\, 0} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{\sin(x)}{x}}}_{\downarrow\, 1} = 0$$

Attenzione:

$$\left.\begin{array}{l} x^3 = o(x) \\ x^4 = o(x) \end{array}\right\} \not\Rightarrow x^3 = x^4 \text{ - non e' vero}$$

Proprietà degli o-piccoli

1) Se $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$ $\Rightarrow$ $k \cdot o(x^\alpha) = o(x^\alpha)$

$\downarrow$

Se f è $o(x^\alpha)$, allora $k \cdot f$ è $o(x^\alpha)$

2) $o(x^\alpha) + o(x^\alpha) = o(x^\alpha)$

Se f è $o(x^\alpha)$, e g è $o(x^\alpha)$, allora $f+g$ è $o(x^\alpha)$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(f+g)(x)}{x^\alpha} = \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{f(x)}{x^\alpha}}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{\frac{g(x)}{x^\alpha}}_{\downarrow\, 0} = 0$$

3) Se $\beta > 0 \Rightarrow x^{\alpha+\beta} = o(x^{\alpha})$

Se $0 < \alpha < \gamma$ $\quad \lim_{x \to 0} \frac{x^{\gamma}}{x^{\alpha}} = 0$ $\quad (\beta = \gamma - \alpha)$

4) $o(x^{\alpha}) + o(x^{\alpha+\beta}) = o(x^{\alpha})$

$\beta > 0$

5) $o(o(x^{\alpha})) = o(x^{\alpha})$ $\quad$ Se f è $o(x^{\alpha})$ e g è $o(f)$

$\Rightarrow g$ è $o(x^{\alpha})$

6) $o(x^{\alpha} + o(x^{\alpha})) = o(x^{\alpha})$

7) $o(x^{\alpha} + x^{\alpha+\beta}) = o(x^{\alpha})$ $\quad (\beta > 0)$

8) $x^{\alpha} \cdot o(x^{\beta}) = o(x^{\alpha+\beta})$

9) $o(x^{\alpha}) \cdot o(x^{\beta}) = o(x^{\alpha+\beta})$

10) $\dfrac{o(x^{\alpha+\beta})}{x^{\beta}} = o(x^{\alpha})$. $\quad$ (sempre $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta > 0$)

Oss: $o(x^\alpha) - o(x^\alpha) = o(x^\alpha)$ Assolutamente non 0.

Es: $x^2 = o(x)$, $x^3 = o(x)$ $x^2 - x^3 \neq 0$

$x^2 - x^3 = o(x)$

Esempio: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} - 1 = 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0 \Rightarrow \sin(x) - x = o(x) \Rightarrow \sin(x) = x + o(x)$

per $x \to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{2-2\cos x - x^2}{2x^2} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x - \frac{x^2}{2}}{x^2} = 0 \quad \Bigg] \rightarrow 1-\cos x - \frac{x^2}{2} = o(x^2)$$

$$\Downarrow$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - o(x^2)$$

$$\shortparallel$$

$$1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Quindi $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x \to 0$

$$1 - \cos x - \frac{x^2}{2} = h(x) \qquad 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\shortparallel$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - h(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + (-h(x)) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{-h(x)}{x^2} = -\lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x^2}$$

$$\nearrow 0$$

quindi $-h(x) = o(x^2)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg\, x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1$$

facendo i conti come prima

$tg(x) = x + o(x)$

Sempre dai limiti notevoli:

$e^x = 1 + x + o(x)$

$\log(1+x) = x + o(x)$

Es: $(\operatorname{tg} x)^2 = ?$

$\operatorname{tg} x = x + o(x)$

$$(\operatorname{tg} x)^2 = (x + o(x))^2 = x^2 + 2x \cdot o(x) + o(x)^2 =$$

$$= x^2 + \overset{\parallel\,(1)+(8)}{o(x^2)} + o(x^2) = x^2 + o(x^2)$$

Esempio:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin^2 x)-1}{x^4}$$

$$\cos(\sin^2 x)-1 = \cos\left[(x+o(x))^2\right]-1 =$$

$$= \cos\left(x^2+o(x^2)\right)-1 = *$$

$$\cos y = 1-\frac{y^2}{2}+o(y^2)$$

$$\boxed{y\to 0}$$

Posso sostituire $x^2+o(x^2)$ al posto della y, poiché per $x\to 0$ $x^2+o(x^2)\to 0$

$=$

$$* \;\; \cancel{1} - \frac{(x^2+o(x^2))^2}{2} + o\left(x^2+o(x^2)\right)^2 - \cancel{1} =$$

$$= -\frac{x^4 + \boxed{2x^2\cdot o(x^2) + o(x^2)^2}}{2} + o\left(\dots\right) =$$

$$= -\frac{x^4 + \boxed{o(x^4)}}{2} + o\left(x^4+o(x^4)\right) =$$

$$= -\frac{x^4+o(x^4)}{2} + o(x^4) = -\frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin^2 x)-1}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{2}$$

$$\shortparallel$$

$$\lim_{x\to 0} -\frac{1}{2}\cdot \frac{\cancel{x^4}}{\cancel{x^4}} + \boxed{\frac{o(x^4)}{x^4}} \to 0$$

Def: Si dice che f è O-grande di g per x che tende a x_0 se $\frac{f(x)}{g(x)}$ è limitata in un intorno di x_0.

$$[\, f = O(g)$$

Vuol dire che $\exists\ M>0$ e un intorno U di x_0 tale

che se $x \in U \setminus \{x_0\}$ allora $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq M$

Se f è o-piccolo di g allora f è O-grande di g

Il viceversa non vale

Esempio $f(x) = x \cdot \sin x$, $g(x) = x$ f è O-grande di g per $x \to 0$

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \left|\frac{x \cdot \sin x}{x}\right| = |\sin x| \leq 1 \Rightarrow f \text{ è } O(g)$$

(In questo f è $O(g)$ $\forall x \in \mathbb{R}$)

[Esempio $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = x$ $\quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \Rightarrow f$ è $O(g)$

ma f non è $o(g)$

Def: $f: A \to \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione per A,

$L, \alpha \in \mathbb{R}$, $L \neq 0$. Se $x_0 \in \mathbb{R}$

e $f(x) = L(x - x_0)^\alpha + o((x - x_0)^\alpha)$ per $x \to x_0$

si dice $L(x-x_0)^\alpha$ e' la parte principale di f per ~~x~~ che tende a x_0.

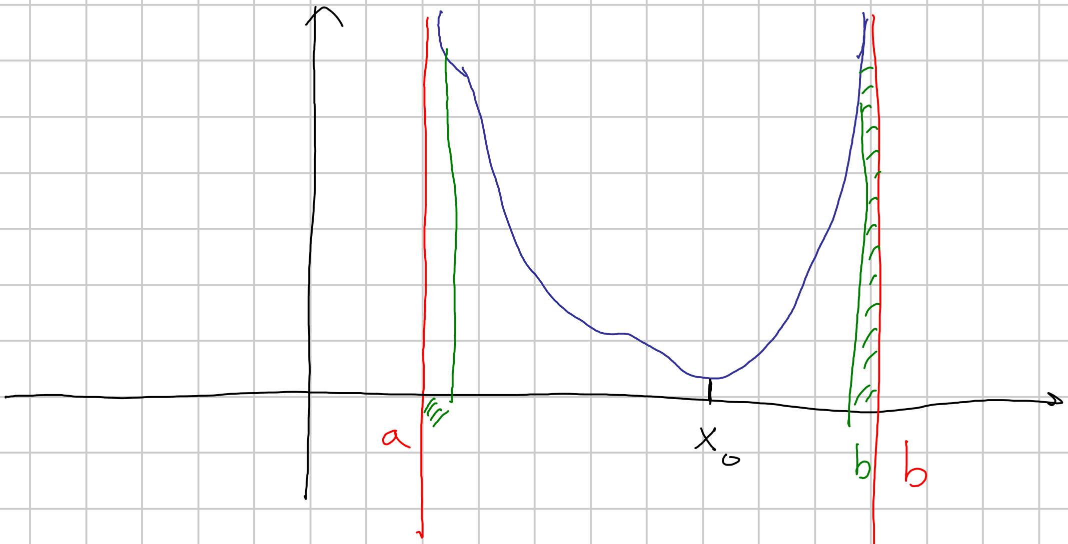
Se $x_0 = +\infty$ e $f = L \cdot x^\alpha + o(x^\alpha)$ per $x \to +\infty$

si dice che $L \cdot x^\alpha$ è la parte principale di f per x che tende a $+\infty$

(stessa definizione per $x \to -\infty$)

Prop: $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ continua

Se $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$, allora f ha minimo.



Butto via un piccolo intervallo aperto a dx di a e uno a sx di b

Similmente se $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$, e $\lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty$

$\Rightarrow f$ ha massimo

Es: $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ $\quad f(x) = \dfrac{1}{x-x^2} = \dfrac{1}{x(1-x)}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{0^+\cdot 1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{1\cdot 0^+} = +\infty$$

$\Rightarrow f$ ha certamente un minimo in $(0,1)$

Teorema (Weierstrass generalizzato).

Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ e $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua.

Supponiamo $\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell_1$, $\lim_{x \to b^-} f(x) = \ell_2$

con $\ell_1, \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$

1) Se $\exists\, x_0 \in (a, b)$ t.c. $f(x_0) \geq \max\{\ell_1, \ell_2\}$

allora f ha un massimo su (a, b).

2) Se $\exists\, x_1$ t.c. $f(x_1) \leq \min\{\ell_1, \ell_2\}$ allora f ha

minimo. ↑

$(-\infty < x < +\infty)$

$\forall x \in \mathbb{R}$